行政院所屬各機關因公出國人員出國報告書
（出國類別:實習）

參加瑞士央行基金會舉辦之
「金融實證進階課程」
選擇權風險中立機率分配之意涵與應用

服務機關：中央銀行

姓名職稱：曾虹瑋/四等專員

派赴國家：瑞士伯恩

出國期間：108 年 2 月 2 日至 2 月 17 日

報告日期：108 年 5 月

大綱

一、 前言

職奉准於民國 108 年 2 月 2 日至 2 月 17 日參加瑞士央行基金會於瑞士伯恩舉辦為期 2 週之「金融實證進階課程」。本次課程學員來自 26 國共 27 位[1]。講師包括瑞士洛桑大學（University of Lausanne）教授 Michael Rockinger 及 Norman Schurhoff、荷蘭鹿特丹大學（Erasmus University Rotterdam）教授 Casper G. de Vries、法國巴黎高等商業研究學院（HEC Foundation） 教授 Thierry Foucault。

本次課程著重近期金融實證之發展，主要分為四大部分：1）介紹期貨及選擇權評價原理，並透過選擇權求取風險中立機率分配，以建立危機預警指標；2）介紹極值定理，並透過 Pareto 分配計算尾部指數，以瞭解極端狀況下可能面臨的市場波動；3）介紹市場微結構理論，瞭解證券商報價價格原理，並依市場逐筆交易資料估計買入證券可能須付出的成本；4）利用 CoVAR 衡量單一銀行倒閉可能產生的系統風險，並藉由網路模型分析，找出具系統風險之關鍵金融機構。課程安排除講述理論外，全程搭配計量軟體 Matlab、EViews、Stata 進行案例演練，訓練學員實務操作能力。

課程範圍極廣，本文挑選選擇權做深入研究。本報告第一節為前言，簡介課程內容；第二節說明選擇權等衍生性商品評價原理；第三節說明選擇權評價觀點及使用之數學技巧；第四節說明評價中的套利觀點，並以 Black and Scholes 模型推導；第五節說明評價中的機率平賭觀點；第六節介紹選擇權價格還原標的資產風險中立價格分配，並以實證論文說明如何應用於央行政策；第七節為心得與建議。

[1] 亞美尼亞、巴西、柬埔寨、捷克共和國、法國、格魯吉亞、德國(德國央行與 ECB)、印度、義大利、約旦、哈薩克斯坦、南韓、立陶宛、墨西哥、摩洛哥、菲律賓、波蘭、羅馬尼亞、俄羅斯、蘇里南、瑞典、台灣、突尼西亞、土耳其、英國、美國。

二、 選擇權等衍生性商品評價原理

(一) 假設無套利空間（No-Arbitrage Principle）

1. 衍生性金融商品係指其價值由利率、匯率、股價、指數、商品或其他利益及其組合等所衍生之交易契約。

2. 學理上，衍生性金融商品評價基礎為無套利空間[2]，如持有標的資產或以衍生性商品（如期貨或選擇權）持有相同商品，其持有成本應一致，否則可買低賣高進行無風險套利，透過套利，兩者價格將達到均衡[3]。

(二) 假設風險中立（Risk Neutral）

1. 經濟學將投資人態度區分為 3 類，包括風險趨避、風險愛好及風險中立，而所有的衍生性商品評價原理，都採用風險中立假設，即所有報酬期望值都是以無風險利率折現。

2. 此原因在於，在市場無套利空間下，標的資產及衍生性商品價格會達成均衡，而又因為標的資產及衍生性商品來自同一隨機源（即標的資產價格變動路徑），可藉由比例調配成無風險的投資組合（如持有標的資產，搭配放空衍生性商品），故僅能獲得無風險利率報酬，否則將存有套利空間。

三、 選擇權評價模式與數學方法

(一) 評價模式

評價選擇權主要目的在於找尋選擇權的合理價格，其大致可以分為兩種評價模式：

1. 對標的資產價格變動進行假設，再導出選擇權價格：如假設標的

[2] 套利定義為期初不須自有現金流出，透過買高賣低，在不承受風險的情況下，享受利潤。
[3] 惟實務上，兩者間未必能達到均衡，因市場可能存有障礙（如無法取得現貨放空，以致常見期貨持有成本低於現貨持有成本）或者反映投資人偏好（如投資人偏好某國貨幣，致遠期外匯價格與外匯現貨價格間並非單純反映利差）。

資產價格變動服從幾何布朗運動（geometric Brownian motion），推導出歐式選擇權合理價格的公式解。

2. 利用選擇權市價還原風險中立機率測度，再依此評價選擇權：假設投資人均認同市場價格，還原隱藏於市場選擇權價格中之風險中立機率測度，再依此機率測度求取出選擇權合理價格。

(二) 數學方法

選擇權評價使用的數學模型，大概可以分為標的資產交易為連續交易模式的套利觀點（arbitrage approach）及可設定標的資產價格變動為間斷的機率平賭觀點（martingale approach）。

Black and Scholes（1973）推導選擇權公式係採用套利觀點，惟 Black Scholes 的選擇權評價公式須要使用大量且繁複的數學技巧，求解過程繁雜困難，甚至可能無法得到公式解。

為了解決這個問題，Cox and Ross （1976）、Harrison and Kerps （1979）、Harrison and Pliska （1981）提出另一種衡量衍生性商品價格的評價方法，稱為機率平賭評價方法（the martingale pricing method），透過此法，亦可推導出與 Black Scholes 相同的公式，由於方法較為簡單，廣為研究使用。

四、 套利觀點及 Black Scholes 模型

(一) Black and Scholes 採套利觀點推導選擇權公式

Black and Scholes 雖非研究選擇權評價的第一人，卻是訂定選擇權採風險中立評價的第一人。

Black and Scholes 模型的關鍵點在於，在連續時間交易下，建立無風險避險組合（Hedged Portfolio）是可行的。其以股票選擇權為例，因股票選擇權與股票有相同的隨機源，兩者只要以適當的比率，連續調整，就可以消除不確定的隨機源，形成一個無

風險的避險組合。為了避免無風險套利機會，該避險組合只能得到無風險報酬率，由 Black and Scholes 模型可見，股價的預期成長率及投資人對風險的偏好，都不會影響到選擇權價格。

(二) 套利觀點的步驟

套利觀點的作法可拆解為下列步驟：

1. 設定標的資產價格模型
2. 導出衍生性資產價格變動須依循的路徑
3. 創造一個風險中立的投資組合
4. 讓投資組合瞬間（instantaneous）報酬率等於無風險資產報酬率
5. 利用偏微分方程式（partial differential equation）得出所有衍生性資產須遵守的路徑
6. 在邊界限制 （boundary constraints）下，解出偏微分方程式，以得出閉合解（closed-form solution）或數值解（solve numerically）

(三) 以 Black scholes 模型為例，說明使用套利觀點的方法

Black scholes 評價公式推導過程，係將標的資產價格運動假設為對數常態分配，透過標的資產與選擇權構成無風險且無套利機會的投資組合，再利用伊藤引理[4]（ito lemma）推導出歐式選擇權對標的資產價格及時間的偏微分方程（partial differential equation, PDE），再將歐式選擇權到期現金流量當作邊界條件（boundary condition），經過適當的變數轉換後，轉成熱傳導公式之偏微分方程式，即可得到歐式選擇權合理價格之公式

[4] 選擇權評價公式的源頭，要回溯到 Bachelier(1900)。他將離散時間下的股價變動設定為隨機漫步(random walk)，並證明了隨機漫步可以用來產生布朗運動(Brownian)。Wiener(1923)將股價變動的隨機過程以數學式來表達，也就是衛納過程(Wiener Process)。日本學者伊藤清(ito, 1951)將衛納過程和數學展開式結合，導出衍生性金融商品定價理論所須要的主要引理，稱為伊藤氏引理(ito lemma)。

（close-form solution）。若導出歐式買權公式，再利用買權賣權平價關係（put call parity），導出歐式賣權評價公式。

以下說明 Black scholes 的基本假設，並分步驟推導套利觀點導出的 Black scholes 公式：

1. Black scholes 基本假設
   - 標的資產價格變動遵循幾何布朗運動
   - 股票交易連續進行，且股票具可無限分割（可交易任何比率的股票），股票可放空且可充分利用放空而得的資金。
   - 不計算交易費用和稅
   - 標的資產在衍生性商品存續期間，不分配任何現金股息。
   - 市場不存在任何套利機會。
   - 存在無風險利率，且為常數。
   - 股價波動率在選擇權到期期間內為固定常數。
   - 必須是歐式選擇權。
2. 設定標的資產價格模型

標的資產連續複利報酬(r)可設定為

$$r_t = \log\left({S_t}/{S_{t-1}}\right) \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

S：標的資產價格

首先，Black scholes 先假設該報酬服從常態分配（雖實際上，這是錯誤的假設，但卻是一個很好的起始點），故r_t可寫為：

$$r_t = \mu + \sigma\varepsilon_t \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

$$\varepsilon_t \sim N(0,1)$$

該式等同說明

$$r_t \sim N(\mu, \sigma^2)$$

可將（1）式結合（2）式，並改寫為：

$$\log(S_t) = \log(S_{t-1}) + \mu + \sigma\varepsilon_t \quad \ldots\ldots \text{（3）}$$

將（3）式整理，兩邊同時指數化，即可得

$$S_t = S_{t-1} exp(\mu + \sigma\varepsilon_t) \ \ldots\ldots \text{（4）}$$

藉由（4）式可見S_t服從對數常態分配（log-normal distribution）

考慮兩個連續的報酬（successive returns），假設兩者分配為獨立，則兩者相加之分配為，

$$r_t + r_{t+1} \sim N(2\mu, 2\sigma^2) \ \ldots\ldots \text{（5）}$$

（5）式隱含報酬之平均數及變異數將隨時間增加而增加，亦即標準差將隨時間之均方差而增加。

若將$P_t = \log(S_t)$， P為指數化後之標的資產價格

假設經過一段非常短的時間，則藉由（5）式隱含的概念，並結合（3）式概念，則導出該段時間內P_t的變化為

$$dP_t = \mu dt + \sigma\sqrt{dt}\varepsilon_t \ \ldots\ldots \text{（6）}$$

在（6）式中，$\sqrt{dt}\varepsilon_t$ 為布朗運動的增量（increment of a Brownian motion （BM）），而布朗運動又稱為維納過程（Wiener process, WP），將其表示為（7）

$$dW_t = \sqrt{dt}\varepsilon_t \ \ldots\ldots \text{（7）}$$

若將大量之布朗運動或維納過程之小幅增量加總而得布朗運動或維納過程，可表示為（8）

$$W_t = W_0 + \int_0^t dW_t \ \ldots\ldots \text{（8）}$$

維納過程的定義為

- 當 t = 0 時值為 0，即$W_0 = 0$。
- 增量間為獨立。
- 軌跡為連續，即為連續函數。

為了得到W_t的分配，須整合dW_t。若將 t 均分成 N 塊，即將時間由 t 均分切成 t/N，則將 （7）式概念代入（8）式，可得

$$\begin{aligned} W_t &= W_0 + \sum_{i=1}^{N} \sqrt{\frac{t}{N}} \varepsilon_i \\ &= W_0 + \sqrt{\frac{t}{N}} \sum_{i=1}^{N} \varepsilon_i \\ &= W_0 + \sqrt{t}\, \varepsilon_t \quad \ldots\ldots \quad (9) \end{aligned}$$

導出（9）式的第三條方程式，係因若ε_t是獨立變數，且有相同的分配，$E[\varepsilon_i] = 0$ 且$V[\varepsilon_i] = 1$，則

$$\sqrt{\frac{1}{N}} \sum_{i=1}^{N} \varepsilon_i \sim N(0,1)$$

因此，

$$W_t \sim N(0, t)$$

$$W_T - W_t \sim N(0, T - t)$$

先前定義$P_t = \log(S_t)$，即$S_t = exp(P_t)$。衍生性商品價格為S_t的函數，而S_t則為P_t的函數，為維納過程的函數，因此如欲瞭解衍生性商品價格變動，則須瞭解如何說明維納過程的變動。

若將S_t假設為P_t及t （時間）的函數，即$S_t = f(P_t, t)$，再

利用泰勒展開式得出衍生性商品價格變動，並忽略比dt小的項目

$$dS_t = df(P_t, t\ \ )$$

$$= \frac{\partial f}{\partial P} dP_t + \frac{\partial f}{\partial P} dt + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial P^2}(dP_t)^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial P \partial t} dP_t dt + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(dt)^2$$

……. （10）

（10）式中，由（6）式可得

$$dP_t\ =\ \mu dt + \sigma\sqrt{dt}\varepsilon_t$$

而在 t 非常小的情況下

$$(dt)^2 = 0\ \ dtdW = 0\ \ (dW)^2 = dt$$

因此，可將（10）式的部分項目化簡

$$(dP_t)^2 = \mu^2(dt)^2 + 2\mu\sigma dtdW_t + \sigma^2(dW_t)^2 \approx \sigma^2 dt$$

$$dP_t dt = \mu(dt)^2 +\ \sigma dW_t dt \approx 0$$

並將化簡後的項目代入（10）式，可得

$$dS_t = df(P_t, t\ \ ) = \left[\frac{1}{2}\sigma^2\frac{\partial^2 f}{\partial P^2} + \mu\frac{\partial f}{\partial P} + \frac{\partial f}{\partial t}\right]dt + \sigma\frac{\partial f}{\partial P}\ dW_t$$

…… （11）

（11）式即稱為伊藤引理（Ito's lemma），其中μ和σ可有自己的公式。

因 $S_t =\ exp(P_t) =\ e^{P_t}$ ， 故 $\frac{\partial f}{\partial t} = 0$ ， $\frac{\partial f}{\partial P} = e^{P_t} = S_t$ ， $\frac{\partial^2 f}{\partial P^2} = e^{P_t} = S_t$

將其代入（11）式，可得

$$dS_t = df(P_t, t\ \ ) = \left(\mu + \tfrac{1}{2}\sigma^2\right)S_t dt + \sigma S_t\ dW_t\ \ …… （12）$$

令$\mu_s \equiv \mu + \frac{1}{2}\sigma^2$，可改寫為

$$dS_t = df(P_t, t\ ) = \mu_s S_t dt + \sigma S_t\, dW_t \ \ldots\ldots \quad (13)$$

而（13）式中隱含的過程，稱為幾何布朗運動（geometric Brownian motion）。相較於幾何布朗運動，若$dS_t = \mu dt + \sigma dW_t$，則稱為平均布朗運動（arithmetic Brownian motion ）。

3. 導出衍生性資產價格變動須依循的路徑

根據（13），標的資產價格的動態為$dS_t = \mu_s S_t dt + \sigma S_t\, dW_t$，而根據伊藤定理，可得買權的價格$C(S_t, t\ )$，至於賣權的價格，可由買賣權等式求出（put-call parity）。買權價格方程式如下：

$$dC(S_t, t\ ) = \left[\frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S_t^2} + \mu S_t \frac{\partial C}{\partial S_t} + \frac{\partial C}{\partial t}\right] dt + \sigma S_t \frac{\partial C}{\partial S_t}\, dW_t$$

……（14）

4. 創造一個風險中立的投資組合，並讓投資組合瞬間（instantaneous）報酬率等於無風險資產報酬率

根據 Black-Scholes（1973）及 Merton（1973），創造一個結合選擇權及標的資產的投資組合，以連續進行靜態避險，由於不存在套利機會，此投資組合收益率必等於無風險利率。為創造此投資組合，可賣出 1 單位的買權，並買入$\frac{\partial C}{\partial S}$單位的標的資產。令$\delta \equiv \frac{\partial C}{\partial S}$，δ又稱為選擇權的避險比率或選擇權的 delta。

該投資組合起初的成本為V：

$$V_t(S_t, t\ ) = \frac{\partial C}{\partial S_t} S_t - C(S_t, t\ )$$

投資組合動態為

$$dV_t(S_t,t\ \ ) = \frac{\partial C}{\partial S_t} dS_t - dC(S_t,t\ \ )$$

$$= \frac{\partial C}{\partial S_t}[\mu_s S_t dt + \sigma S_t\, dW_t]$$

$$-\left[\frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S_t^2} + \mu S_t \frac{\partial C}{\partial S_t} + \frac{\partial C}{\partial t}\right] dt - \sigma S_t \frac{\partial C}{\partial S_t}\, dW_t$$

$$= \left[-\frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S_t^2} - \frac{\partial C}{\partial t}\right] dt \quad \ldots\ldots（15）$$

基於該投資組合並無風險，故為避免套利，該投資組合的瞬間收益須等於無風險資產報酬率。

無風險資價格B之報酬率動態dB可表示為：

$$B_t = B_0 e^{rt} \rightarrow dB_t = rB_t dt \qquad \ldots\ldots（16）$$

因B_t 須等於V_t ，且dB_t 須等於dV_t，故

$$-\frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S_t^2} - \frac{\partial C}{\partial t} = rB_t = r\left[\frac{\partial C}{\partial S_t} S_t - C(S_t,t\ \ )\right] \quad \ldots\ldots（17）$$

5. 在邊界限制 （boundary constraints）下，解出偏微分方程式，以得出 closed-form solution, 閉合解或數值解（solve numerically）

（17）式經過移項後可得到衍生性資產之偏微分方程式

$$\frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S_t^2} + rS_t \frac{\partial C}{\partial S_t} + \frac{\partial C}{\partial t} = rC(S_t,t\ \ ) \quad \ldots\ldots（18）$$

（18）式須在下列限制下求解

$$C(0,t\ \ ) = 0$$

$$C(S_t,\mathrm{T}) = max(S_T - K, 0)$$

K：表示為履約價格

即可導出 Black-Scholes 公式。

Black Scholes 是經過變數變換，並簡化為熱力方程式求解。惟現在已可用更優雅的方式求解，Feynman-Kac，其概念如下：

先將（18）式中的買權價格以折現值表達

$$C(S_t,t\ \ )=e^{-r(T-t)}g(S_t,t\ \ )$$

其中，$g(S_t,t\ \ )$為到期日標的資產價格之預期值

$$\frac{\partial C}{\partial S_t}=e^{-r(T-t)}\frac{\partial g}{\partial S_t}\ ,\ \frac{\partial^2 C}{\partial S_t^2}=e^{-r(T-t)}\frac{\partial^2 g}{\partial S_t^2}\ ,$$

$$\frac{\partial C}{\partial t}=rC+e^{-r(T-t)}\frac{\partial g}{\partial t}\qquad \ldots\ldots（19）$$

將（19）式代入（18），並化簡，可得

$$\frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2\frac{\partial^2 g}{\partial S_t^2}+rS_t\frac{\partial g}{\partial S_t}+\frac{\partial g}{\partial t}=0\qquad \ldots\ldots（20）$$

回到布朗運動，假設機率分配為常態分配$N(x,T-t)$下，在 t 時間點過程在 x，而在 T 時間點過程在 y，此機率密度函數q可被寫為

$$q(x,y,t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi(T-t)}}exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{y-x}{\sqrt{T-t}}\right)^2\right\}\quad \ldots\ldots（21）$$

經過複雜的運算，可得

$$\frac{\partial q}{\partial t}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 q}{\partial x^2}=0$$

而如前所述，$dS_t=\mu_s S_t dt+\sigma S_t\, dW_t$，若在 t 時間點過程在$S_t$，而在 T 時間點過程在$S_T$，則機率密度函數$q(S_t,S_T,t)$須滿足

$$\frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2\frac{\partial^2 q}{\partial S_t^2}+\mu S_t\frac{\partial q}{\partial S_t}+\frac{\partial q}{\partial t}=0\qquad \ldots\ldots（20）$$

Feynman-Kac 的洞見在於考慮條件期望值

$$g(S_t, t) = E[\max(S_T - K, 0) | S_t, t]$$

$$= \int_{S_T} \max(S_T - K, 0) q(S_t, S_T, t) dS \qquad \ldots\ldots \quad (21)$$

此將發現條件期望值滿足邊界限制

$$\lim_{t \to T} g(S_t, t) = \max(S_T - K, 0)$$

偏微分方程式也是

$$\frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 g}{\partial S_t^2} + r S_t \frac{\partial g}{\partial S_t} + \frac{\partial g}{\partial t} = 0$$

6. 得出選擇權公式

除 Black Scholes （1973）利用前述方式導出未付股利的選擇權公式外，Merton （1973）導出付股利的股票選擇權公式、Black （1976）導出期貨契約的選擇權、Garman-Kohlhagen （1983）匯率導出選擇權公式，亦採此法。

(1) Black Scholes （1973）：未付股利的選擇權公式

$$C(S_t, t) = S_t \Phi(d_1) - K e^{-r(T-t)} \Phi(d_2)$$

$$P(S_t, t) = K e^{-r(T-t)} \Phi(-d_2) - S_t \Phi(-d_1)$$

其中，$d_1 = \left[\log\left({S_t}/{K}\right) + \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)\right] / \sigma\sqrt{T-t}$

而，$d_2 = \left[\log\left({S_t}/{K}\right) + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)\right] / \sigma\sqrt{T-t}$

避險比率（hedge ratio） $\delta \equiv \Phi(d_1)$

(2) Merton （1973）：付股利的股票選擇權公式

股票發放連續股利，連續股利率為 d，表示為比率

$$C\left(S_t,t\ \ \right)=S_t\,\Phi(d_1)-Ke^{-r(T-t)}\,\Phi(d_2)$$

$$P\left(S_t,t\ \ \right)=Ke^{-r(T-t)}\,\Phi(-d_2)-S_t\,\Phi(-d_1)$$

其中，$d_1=\left[\log\left({S_t}/{K}\right)+\left(r-d+\frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)\right]/\sigma\sqrt{T-t}$

而，$d_2=\left[\log\left({S_t}/{K}\right)+\left(r-d-\frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)\right]/\sigma\sqrt{T-t}$

(3) Black（1976）期貨契約的選擇權

概念為$F_t=S_te^{r(T-t)}$，而在 T 時，$F_T=S_T$，

$$C\left(F_t,t\ \ \right)=e^{-r(T-t)}\left(F_t\,\Phi(d_1)-K\,\Phi(d_2)\right)$$

其中，$d_1=\left[\log\left({F_t}/{K}\right)+\frac{1}{2}\sigma^2(T-t)\right]/\sigma\sqrt{T-t}$

而，$d_2=\left[\log\left({F_t}/{K}\right)-\frac{1}{2}\sigma^2(T-t)\right]/\sigma\sqrt{T-t}$

避險比率（hedge ratio）$\delta\equiv\Phi(d_1)$

此公式亦可用在利率選擇權

(4) 匯率選擇權：Garman-Kohlhagen （1983）

該公式立足於Black Scholes公式，定義E_t是給訂時間的匯率。

此定義匯率為多少本國貨幣可獲得一單位外國貨幣。因此外

匯期貨下可表示為$F_t=E_te^{\left(r^D-r^F\right)(T-t)}$

將此式代入選擇權價格模型

$$C(E_t, t\ \ ) = e^{-r^D(T-t)}\left(E_t e^{(r^D-r^F)(T-t)}\,\Phi(d_1) - K\,\Phi(d_2)\right)$$

其中，$d_1 = \left[\log\left({}^{E_t}/_{K}\right) + \frac{1}{2}\sigma^2(T-t)\right]/\sigma\sqrt{T-t}$

而，$d_2 = \left[\log\left({}^{E_t}/_{K}\right) - \frac{1}{2}\sigma^2(T-t)\right]/\sigma\sqrt{T-t}$

五、 機率平賭觀點及概念

(一) 平賭過程觀點概念

Cox and Ross （1976）、Harrison and Kerps （1979）、Harrison and Pliska （1981）為解決 Black Scholes 複雜難解甚或無法求解的狀況，提出機率平賭評價方法。

在此法中，係先在風險中立的機率測度下求算衍生性金融商品的期望報酬，再將未來現金流量折現到衍生性商品之評價時點，即可評價衍生性金融商品價格。

機率平賭方法涉及機率測度轉換，須借重 Girsonov 定理。當假設資產價格變動服從幾合布朗運動時，經過條件期望值的運算及累積分布，結果與 Black Scholes 模型相同。由於平賭過程可簡化衍生性商品評價過程，且不涉及複雜的數學技巧，在實務界上廣為運用。

(二) 機率平賭過程（martingale process）之定義

假設資產於時點 t 的價格為 S_t，且由時點 0 累積到時點 t 的訊息集合（filtration）為 F_t，若存在一機率測度 Q 使得

$$E^Q[S_t|F_t] = S_t\ ，t < T$$

則稱資產S_t變動過程為一平賭過程。

根據平賭過程的意義與風險中立下的經濟意涵，Harrison 與 Kreps（1979）及 Harrison 與 Pliska（1981）提出等價平賭過程法則。若市場無任何套利機會存在時，則必存在一風險中立機率測率 Q 等價於市場力量所決定的主觀機機率測度 P，使得衍生性金融商品的價格變動過程，在機率測度下服從平賭過程，故風險中立機率測度 Q 又稱作等價平賭機率測度

(三) 機率平賭觀點的主要步驟

平賭過程評價方法的主要步驟為：

1. 設定標的資產價格模型
2. 將未來所有現金流折現
3. 將產生過程（resulting process）為平賭過程
4. 利用期望值（expectation）計算選擇權價格
5. 得出一個避險策略（複製投資組合，自我融資交易策略）

(四) Cox、Ross and Rubinstein（1979）提出二項式選擇權模型

Cox、Ross and Rubinstein（1979）發展出一種在離散時間（discrete time）下的數值方法，對選擇權做出合理評價，謂之 CRR 二項式選擇權評價模型（binomial tree）。二項式評價模型以二元樹（binomial tree）的概念為基礎，並運用離散方式描繪標的資產的價格走勢，透過預期未來標的資產價格不是上漲，就是下跌的觀念，繪出二元樹圖來分析。此外，在適當的假設之下，選擇權在任一時點產生的現金流量，皆可被一投資組合精確複製，因此，在無套利機會的假設下，利用自我融資資產複製的方式，可導出風險中立的選擇權模型。

相較於 Black-Scholes 選擇權評價理論，二項式評價模型簡單易懂，且所涉結果僅是代數運算，並證明出當二元樹的分割期

數趨近於無限多期時，所得結果與 Black-Scholes 選擇權評價模型相同，故廣受採用。

Rubinstein（1994）推出一套迥異於偏微分方程解選擇權合理價格的數值方法，在資產的價格變動呈離散型下，利用二元樹模型（implied binomial tree model）及曲線配置法，透過資產價格服從機率平賭的概念，還原標的資產的風險中立機率密度，藉此機率密度求出選擇權的合理價格。

六、 利用選擇權市場價格還原風險中立下的隱含機率分配

(一) 選擇權交易資料顯示 Black-Scholes 假設並非事實

在 Black-Scholes 模型中，模型假設標的資產符合對數常態，模型所推導的波動率公式在所有履約價格（exercise price）及整個合約期限（maturities），均為固定。

因隱含波動率[5]為選擇權定價公式的反函數，故依據 Black-Scholes 公式，將相同標的物、不同履約價、不同到期日的歐式選擇權的市價，代入 Black-Scholes 模型中，其隱含波動率應該相等，否則會存在套利空間。

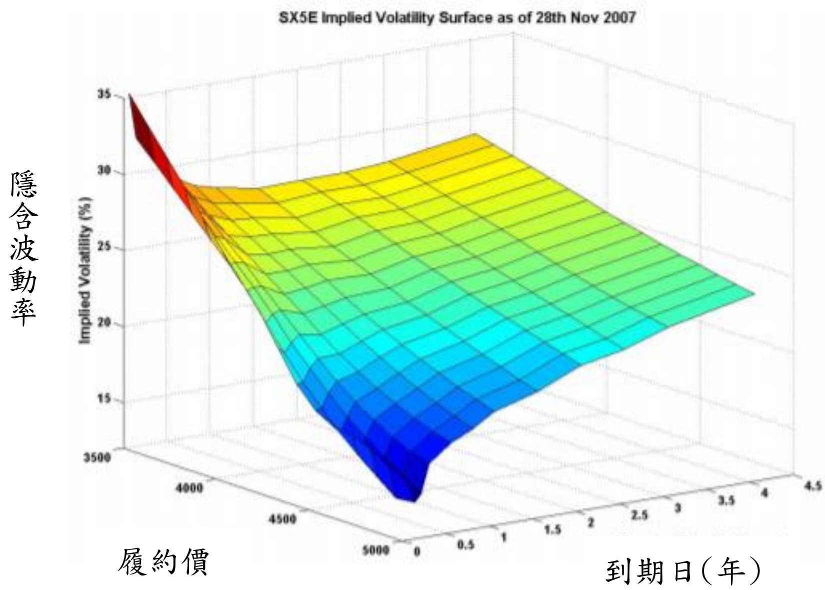
已有大量實證顯示，標的資產價格（特別是金融資產價格）服從常態分配並非事實，而是左尾（負報酬）的厚尾分配，即出現市場負極端值的機率高於常態分配下的機率，負極端值也較常態分配更為極端。Jackwerth and Rubinstein（1996）發現，自從股市崩盤後，在風險中立下，S&P500 下跌 3 個標準差比對數常態分配多了 10 倍，下跌 4 個標準差比對數常態分配多了 100 倍。

此外，1987 年以前，股價指數選擇權隱含波動率幾為水平，

[5] 市場常用的隱含波動率是以 Black Scholes 反推而得，亦可用其他公式推導而得。隱含波動率是反映市場對未來波動率的看法。

惟在美國股市崩盤以後，其隱含波動率曲線變為傾斜度相當大的微笑曲線，而全球主要證券市場均有此現象（Silverio and Wu 2005）。由波動率曲面型態觀之，選擇權價格的隱含波動率，在每一個履約價格並不相同，在不同到期日也不相同，意即若將相同標的、不同履約價、不同到期日的歐式選擇權的市價分別帶入 Black and Scholes 模型中，其隱含波動率、履約價、到期日的關係並非平面（Haugh，2009）（圖 1）。

圖 1　選擇權隱含波動率曲面



資料來源：Haugh, M.（2009）

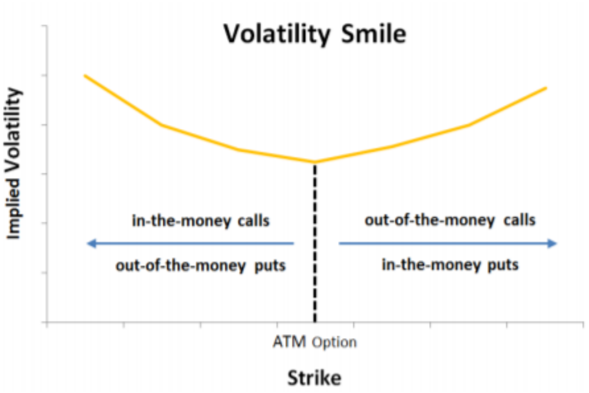
(二) 波動率微笑曲線及波動率期限結構

一般而言，整個波動率曲面隨著履約價的提高而向下傾斜，但傾斜的程度，又隨著到期日的逼近先降後升。對於某一個特定到期日的選擇權，履約價與到期日的不同組合，形成波動率微笑（volatility smile）曲線，隱含波動率曲面，是由不同到期日的波動率微笑曲線構建而成。

1.波動率曲線

擁有相同到期日，但不同履約價格者，具有不同的波動率，該特色稱為波動率微笑。(圖 2)

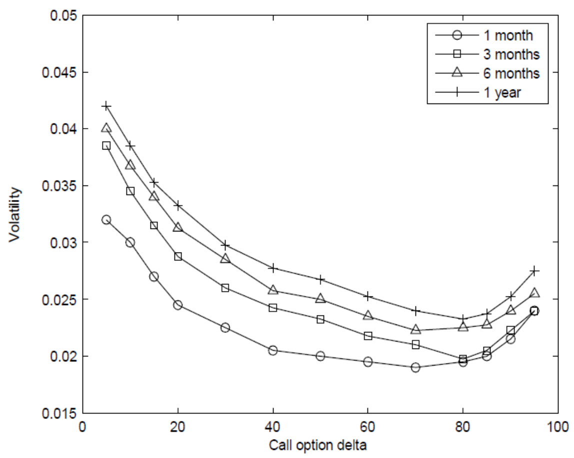
圖 2　選擇權隱含波動率微笑曲線



資料來源：Peter Nowak and Patrick Sibetz（2012）

Jondeau and Rockinger（2000），利用法國法郎/德國馬克選擇權資料及法國 CAC 指數，即發現波動率有微笑現象。圖 3 為法郎/德國馬克買權資料(call option)，期間選為 1996 年 5 月 17 日，是一個正常（normal）的日子，此時可發現，在不同履約價格部分，避險比率（δ）越低者，即履約價格越高者，價格越貴（highly valued），即代表市場預期匯率將上揚(即法國法郎貶值)，在不同的到期日下，均可見波動率微笑情形。

圖 3　法郎/德國馬克買權隱含波動率



資料來源： Jondeau and Rockinger（2000）
註：Call option delta 即買權避險比率，越高表履約價越低。

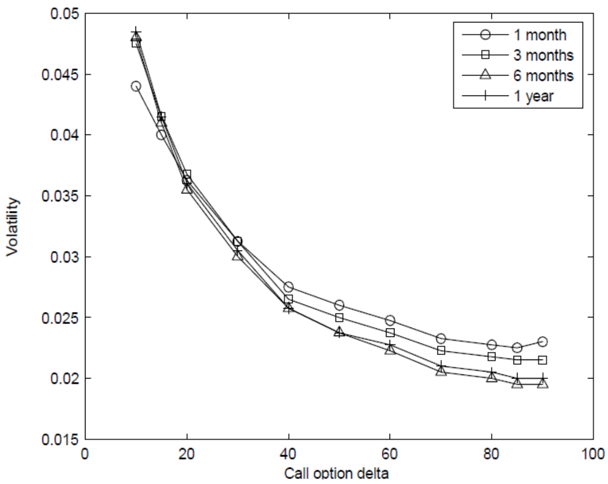
2.波動率期限結構

不同到期日間的波動率亦不同(不同到期日波動率的移動，稱為波動率的期限結構，term structure of volatility)。

一般而言，在正常情形下，距離到期日越遠，因不確定性越高，波動率越高，惟在面臨短期事件的不確定性，會見到短天期波動率高於長天期波動率的狀況。

Jondeau and Rockinger（2000） 利用法國 CAC40 指數（法國巴黎證券交易所市值前 40 大企業的股票報價指數）買權資料（圖 4)，時間則選在法國總統賈給·席哈克(Jacques René Chirac)宣布快速選舉（snap election）後的第一個交易日，可見不同履約價格之波動率曲線更為陡峭，另外也發現波動率期限結構有倒掛情形（短天期波動率高於長天期)。

圖 4　CAC40 指數買權資料



資料來源： Jondeau and Rockinger（2000）
註：Call option delta 即買權避險比率，越高表履約價越低。

3.買賣權波動率可能不同

根據買賣平價理論（Put-Call Parity)，同一標的資產，相同履約價及相同到期日的歐式買賣權，其隱含波動率應該相等（Hull，2012)。但實務上，買賣權的隱含波動率可能是不同的。

(三) 波動率曲線微笑成因

在相同到期日下，隱含波動率會隨履約價增加而下降，此種現象對於短期的選擇權更明顯，原因包括：

1. 股價非如 Black and Scholes 模式假設，服從固定波動性的幾何布朗運動，而常有跳躍（Jumps）發生。股價大跌的波動幅度及頻率，都比股價大漲者為大，主要係空頭市場下跌速度較快，致價外賣權的隱含波動率比價外買權為高，也就是股市下跌風險高於上漲風險。
2. 投資人因風險趨避，當股市下跌時，市場因恐慌致避險需求增加，低履約價的賣權價格上升，致隱含波動率隨之上升。此種氣氛在 1987 年美股崩盤後更加明顯，一有大跌，低履約價賣權的隱含波動率大幅增加，Rubinstein（1994）稱此為崩盤恐懼症（Crash-O-Phobia）。
3. 大部分股市投資人（如政府基金、共同基金、社會大眾）主要是買入有價證券，投資人為了避險，常購入價外賣權避險（表示需求較高），因此出現低履約價的賣權較貴，即隱含波動率較高，抑或為避險而出售價外的買權（表示需求較低），致高履約價買權較便宜，即隱含波動率較低。
4. 當股價下跌時，股東權益下降，槓桿程度增加，因此，波動性增加，反之，當股價上漲時，槓桿程度下降，波動性減少。

(四) 發展藉由選擇權交易價格探討標的資產之風險中立密度

1987 年美國股市崩盤後，股價指數選擇權之波動性曲線變為陡峭的負斜率微笑曲線，凸顯 Black and Scholes 模型定價的錯誤，也興起將利用選擇權之隱含波動率還原股價分配的研究（如 Rubinstein，1994，Jackwerth and Rubinstein，1996）。

探討由選擇權價格推論標的資產價格機率分布的文獻中，該機率分布通常被稱為風險中立機率密度（risk-neutral densitie, RND）。雖然 Black and Scholes 模型假設不符合事實，但其所假設的風險中立及無套利概念，仍為後續研究的基石。風險中立機率是指，參與者投資願意付出的成本等於該投資回報的期望值，而此期望值對應的機率即為風險中立機率，而該機率對應的分配即為風險中立機率分配。

最早研究由選擇權資產價格推論標的資產風險中立機率密度函數的是 Breenden and Litzenberger（1978）。因歐式選擇權價格等於選擇權到期價值之期望值，再以無風險利率折現的現值，做法為將選擇權價格對履約價格偏微分，產生折現的累積分布函數（Cumulative Distribution Function），而二次微分可得折現的機率密度函數（Probability density function）。分別如下

折現的累積分布函數（cdf）

$$\frac{\partial C}{\partial K} = -e^{-rt}\int_{K}^{\infty} q(S_T)d\,S_T$$

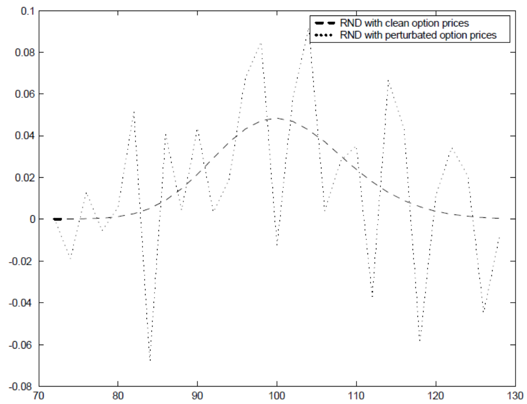
折現的機率密度函數（pdf）

$$\left.\frac{\partial^2 C}{\partial K^2}\right|_{K=S_T} = e^{-rt}q(S_T)$$

然而，Breenden and Litzenberger（1978）的方法，是建立在很多履約價格的選擇權都有被交易，然而，實際上並非如此，而且透過此法獲得的風險中立密度非常不穩定。圖 5 虛線是不被干擾的價格下所得到的風險中立機率密度，而點線為被干擾（如選擇權價格被非同步產生的誤差，例如選擇權交易時，標的資產價

格無法被觀察；又如部分履約價格之選擇權買賣價差非常寬）的價格下所得出的風險中立機率密度，可見該方法實際上並不穩定，有必要用其他方法求算，必須找尋僅有少部分履約價選擇權價格可獲取的情況下，也可推算的方法。

圖 5　選擇權風險中立機率密度



註：虛線及點線分別是在不被干擾的價格及被干擾的
　　價格之風險中立機率密度。
資料來源：Rockinger（2019）

(五) 其他主要風險中立機率密度模型及其所估計的參數

求取風險中立機率密度的模型大致可分為結構性模型（structural model）及非結構性模型（Non-structural model），兩者的區別在於，結構性模型用於捕捉標的資產波動率會變動，或是其報酬率或波動率會產生大幅跳躍（jump）。

課程介紹的幾種方法如下：

1. 混合對數常態分配（Mixture of log normal）

混合對數常態分配，即是將標的資產在風險中立機率下之對數常態分配設為由多組對數機率分配混合而成，每個分配給予不同權重，利用極小化模型推出的選擇權價格與市場交易的選擇價

格，推估模型中須估計的參數，此法有助捕捉具彈性的分配。

Ritchey（1990），Bahra（1997），Melick and Thomas （1997），Söderlind and Svensson（1997），Gemmill and Saflekos（2000）提出將標的資產之風險中立密度假設為混合對數常態分配模型。

單一標的資產對數常態分配模型l，有 mean μ及波動率s，其 pdf 為

$$l(S_T, \mu, \sigma) = \frac{1}{S_T\sqrt{2\pi s^2}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{\log(S_T) - \mu}{s}\right)^2\right)$$

若為混合這樣的機率分配，則為

$$q(S_T; \theta) = \sum_{i=1}^{M} \alpha_i \ l(S_T, \mu_i, s_i)$$

而θ是總和所有未知的參數，包括α_i, μ_i, s_i，對每一個$i = 1, \dots, M$，M為混合對數常態分配的個數，且$\alpha_1 + \cdots + \alpha_M = 1$。

對每一個履約價格及到期期間（time to maturity）$\tau = T - t$，標的資產變動為混合常態分配之選擇權價格C^{LN}為：

$$C^{LN}(K; \theta) = e^{-r\tau} \int_K^{+\infty} (S_T - K) q\,(S_T; \theta) dS_T$$

$$= e^{-r\tau} \int_K^{+\infty} (S_T - K) \sum_{i=1}^{M} \alpha_i \ l(S_T, \mu_i, s_i) dS_T$$

$$= e^{-r\tau} \sum_{i=1}^{M} \alpha_i \int_K^{+\infty} (S_T - K)\, l(S_T, \mu_i, s_i) dS_T$$

在此，將選擇權期間之波動度設為$s_i = \sigma_i\sqrt{\tau}$

$$\int_K^{+\infty} (S_T - K)\, l(S_T, \mu, s) dS_T$$

$$= (E[S_T|S_T > K] - K)Pr[S_T|S_T > K]$$

$$= exp\left(\mu + \frac{1}{2}s^2\right) \times \left[1 - \Phi\left(\frac{\log(K) - \mu - s^2}{s}\right)\right]$$

$$- K\left[1 - \Phi\left(\frac{\log(K) - \mu}{s}\right)\right]$$

最後，可得選擇權價格為

$$C^{LN}(K;\theta)$$

$$= e^{-r\tau}\sum_{i=1}^{M}\alpha_i\left\{exp\left(\mu_i + \frac{1}{2}{s_i}^2\right)\right.$$

$$\times\left[1 - \Phi\left(\frac{\log(K) - \mu_i - {s_i}^2}{s_i}\right)\right]$$

$$\left.- K\left[1 - \Phi\left(\frac{\log(K) - \mu_i}{s_i}\right)\right]\right\}$$

$$= e^{-r\tau}\sum_{i=1}^{M}\alpha_i\, exp\left(\mu_i + \frac{1}{2}{s_i}^2\right)\Phi\left(\frac{-\log(K) + \mu_i + {s_i}^2}{s_i}\right)$$

$$- e^{-r\tau}\, K\sum_{i=1}^{M}\alpha_i\,\Phi\left(\frac{-\log(K) + \mu_i}{s_i}\right)$$

在風險中立機率假設下，可以平賭狀況（martingale condition）說明現在資產價格S_t應等於到期日資產價格S_T的期望值之折現值，即：

$$S_t = e^{-r\tau}E[S_T] = e^{-r\tau}\sum_{j=1}^{M}\alpha_j \exp\left(\mu_j + \frac{1}{2}{s_j}^2\right)$$

選擇權價格也可用 Black Scholes model 表達

$$C^{LN}(K;\theta)=\sum_{i=1}^{M}\alpha_i\left[S_t\Phi\left(d_{1,i}\right)-Ke^{-r\tau}\Phi\left(d_{2,i}\right)\right]$$

$$d_{1,i}=\left[\log\left({S_t}/{K}\right)+\left(\mu_i\tau+\frac{1}{2}{s_i}^2\right)\right]/s_i$$

$$d_{2,i}=d_{1,i}-s_i$$

利用平賭狀態（martingale condition），可得

$$S_t=C^{LN}(0;\theta)$$

上式說明，若履約價格等於零，代表選擇權一定會被履約，因此在到期日一定會取得標的資產。

然而，在實務上，將履約價格設為零，代入 BSM model 並非恰當，因 log（0）無法定義，因此把 K 設為很小，也許可行。

2. Hermite polynomial

歐式選擇權買權價格C_e^{HER}可表示為

$$C_e^{HER}(t,F_t,K,\tau)=e^{-r_t\tau}E[(F_T-K)^+|F_t,t]$$

$$=e^{-r_t\tau}\int_0^{\infty}\left(F_t exp\left[\left(\mu-\frac{1}{2}\sigma^2\right)\tau+\sigma\sqrt{\tau}z\right]-K\right)^+q(z)dz$$

其中，$\tau=T-t$，代表距離之到期日期間，而$F_t exp\left[\left(\mu-\frac{1}{2}\sigma^2\right)\tau+\sigma\sqrt{\tau}z\right]$此式，將$F_T$與$F_t$價格相連，並強調有一個平均值$\mu$和標準差σ。

在 Hermite 展開式中，風險中立機率密度被寫為

$$q(z)=\sum_{k=0}^{4}b_k He_k(z)\,\varphi(z)$$

其中，b_k是參數，H_k（z）是 Hermite 展開式，φ則是標準常態分配的機率密度。則φ及其累積機率分配Φ為

$$\varphi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} exp\left(-\frac{1}{2}(z^2)\right)$$

$$\Phi(z) = \int_{-\infty}^{z} \varphi(u) du$$

此外，

$$He_0(z) = 1$$
$$He_1(z) = z$$
$$He_2(z) = z^2 - 1$$
$$He_3(z) = z^3 - 3z$$
$$He_4(z) = z^4 - 6z^2 + 3$$
$$He_5(z) = z^5 - 10z^3 + 15z$$
$$He_6(z) = z^6 - 15z^4 + 45z^2 - 15$$

歐式買權價格可被寫為

$$C_e^{HER}(t, F_t, K, T, \sigma_t, \theta_t^*) = e^{-r_t\tau} \sum_{k=0}^{4} a_k b_k$$

a_k計算方式如下

$$d_1 = \frac{1}{\sigma\sqrt{\tau}} \log(F_t) + \left(\mu + \frac{1}{2}\sigma\right)\sqrt{\tau}$$
$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{\tau}$$
$$a_0 = F_t \Phi(d_1) - K \Phi(d_2)$$

$$a_1 = \sigma\sqrt{\tau} F_t \Phi(d_1) + F_t \varphi(d_1) - K\varphi(d_2)$$

$$a_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\Big[\left(\sigma\sqrt{\tau}\right)^2 F_t \Phi(d_1) + 2\sigma\sqrt{\tau} F_t \varphi(d_1) + F_t \varphi'(d_1) - K\varphi'(d_2)\Big]$$

$$a_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}\Big[\left(\sigma\sqrt{\tau}\right)^3 F_t \Phi(d_1) + 3\left(\sigma\sqrt{\tau}\right)^2 F_t \varphi(d_1) + 3\sigma\sqrt{\tau} F_t \varphi'(d_1) + F_t \varphi''(d_1) - K\varphi''(d_2)\Big]$$

$$a_4 = \frac{1}{\sqrt{24}}\Big[\left(\sigma\sqrt{\tau}\right)^4 F_t \Phi(d_1) + 4\left(\sigma\sqrt{\tau}\right)^3 F_t \varphi(d_1) + 6\left(\sigma\sqrt{\tau}\right)^2 F_t \varphi'(d_1) + 4\sigma\sqrt{\tau} F_t \varphi''(d_1) + F_t \varphi'''(d_1) - K\varphi'''(d_2)\Big]$$

(六) 以選擇權價格還原資產風險中立機率密度有助央行評估政策

藉由選擇權價格還原資產風險中立機率密度，最主要是瞭解市場參與者對價格的預期，因此有助評估政策效果。以兩篇論文為例：

1. Campa, Chang, Reider（1997）檢視穩定匯率區間設定

為因應歐洲貨幣危機，EC 經濟與金融事務委員會‧中央銀行行長會議於 1993 年 8 月決定，將穩定匯率機制（Exchange Rate Mechanism, ERM）的匯率波動幅度由 2.5%擴大到中心匯率的上下 15％ 。

穩定匯率區間牽涉價格可預測性及面對投機壓力保護的權衡。設定較窄，雖有助匯率的可預測性，但可能面臨大量投機壓力的挑戰；設定較寬，雖有助於降低維持匯率於特定區間的壓力，惟因設定較寬，波動率較大，也較不利預測。

Campa, Chang, Reider（1997）以外匯選擇權價格資料實證，該區間是否設定的太寬，並藉選擇權價格資訊提供一個匯率安全區間。實證結果顯示，15%的區間過寬，其中，在三個月內，法國法郎或丹麥克朗僅須 3.5%區間就可以涵蓋至少 95%的匯率變

動，而瑞典克朗須 5~6%，英鎊則須 8.4%。

2. Jermann Urban（2017）檢視瑞士央行捍衛瑞士法郎下限有效性

2010 年歐債危機爆發且持續發酵，致資金持續湧入避風港瑞士，造成瑞士法郎持續升值，瑞士央行自 2011 年 9 月至 2015 年 1 月將匯率政策訂為將瑞士法郎兌歐元之下限為 1.2 歐元。瑞士央行這項政策之有效性，剛開始時受到市場存疑，而執行這樣的政策，相當考驗政策之可信度，一旦缺乏可信度，瑞士央行須花更多的成本捍衛匯率，也將導致政策成本高昂。因此，須準確衡量市場參與者對政策信任的程度。

Jermann Urban （2017）利用 EURCHF 選擇權資料，發現當政策開始執行的前幾個月時，可信度確實較低，但經過一段時間，到 2014 年 8 月時，政策可信度已相當高。

七、 心得及建議事項

本次訓練課程主要學習近年金融實證的發展，並搭配計量軟體 Matlab、Eviews、Stata 做實證練習，整體課程內容分為四大部分，包括：1）學習衍生性商品評價有助進行擔保品評價、萃取殖利率曲線、瞭解投資者對商品或政策之預期；2）學習極值理論有助瞭解市場面臨極端風險的情形，有助計算資本及保證金；3）學習市場微結構理論，有助瞭解如何評估央行干預外匯市場對市場價格、流動性及波動性的影響；4）學習系統風險，有助以評估個體機構相互影響情形。課程設計相當實務，搭配軟體操作，以增加學員實作能力。其中，在計算選擇權價格及根據價格變化作為擬定政策參考方面，有較多的訓練。此外，在外匯干預成本計算及尋找系統性風險之重要金融機構，亦有相關學習，獲益良多。

綜合課程所學，並考量實務上可用性，建議如下：

(一) 密切關注資產價格風險中立機率分配，以瞭解市場預期

求取選擇權背後隱含的風險中立機率分配，可瞭解市場參與者行為及其對未來資產價格的期望，也可分析市場參與者對政策的反應。

對政策制定者而言，可擇流動性豐沛的選擇權市場，建立風險中立機率分配，作為金融穩定觀察之重要指標，並瞭解未來價格之可能變化，用以評估匯率政策可能的效果。目前，Fed 及 BoE 每天均觀察重要金融資產之風險中立機率分配，以瞭解投資者之預期及行為。

本行可挑選流動性較為豐沛的衍生性商品市場，建立風險中立機率分配，當作金融穩定的觀察指標，也可做為匯率政策參考。

(二) 利用市場微結構理論，研究外匯干預影響或成本

市場微結構理論日益受到央行重視，該理論是藉由研究市場高頻

交易資料（包括價格、成交量、淨市價單方向、買賣價差等資訊），以瞭解影響報酬率波動度的原因及市場流動性。根據 BIS（1999）報告，央行研究市場微結構理論的目的，在於如何將其運用在執行貨幣政策、達成金融穩定或為政府管理債務。

市場微結構理論在實務上的運用，可以估計央行外匯干預的成本。交易商設定買賣價時，可根據接單狀況，預測證券基礎價值，並在報價上反映三種成本，第一為逆選擇（Adverse Selection）成本，即交易商可能發生的損失；第二是交易商存貨成本（Inventory cost），包括建立投資組合的資金成本或自有投資組合面臨的價格風險；第三為營運成本（processing cost），此三種成本越高，交易商買賣價差越大。如能取得價格、交易量、交易商部位資訊，可估計逆選擇成本、交易商存貨成本、營運成本，加上外匯基礎價值，即可推算成交外匯必須付出的價格，即可估計央行進行外匯干預的影響或成本。

(三) 建立風險相關性模型，以觀察系統風險

有關金融機構系統性風險議題方面，本次課程主要討論：第一，以個別金融機構與系統風險指標計算系統風險；第二，金融機構經營風險可能透過交叉持股、交易、借貸等方式，將風險傳染至其他金融機構，課程學習如何透過圖形及數據，找出造成系統風險上升或擴散之重要金融機構。課程採行 Adrian, Tobias, and Markus K. Brunnermeier （2016）之計算方法，該方法主要取用市場價格資料，且不須對價格分配進行假設，計算上相對容易，可作為本行估計系統性風險的簡單模型。

(四) 找出影響系統性風險之重要金融機構

系統性風險的上升，可能是用單一金融機構風險之上升而擴散到全體金融機構，因此，若能有效找到重要金融機構之風險，或可防止

系統性風險的發生。本次以網路模型找出重要金融機構。

本次課程採用 Eigenvector Centrality 模型，分析個體金融機構間的交互關係，排序個體金融機構的系統性風險，找出具巨大影響力的主要機構。未來若能取得集中保管結算所之所有金融機構持有金融商品之交易資料，可根據估計模型，分析各金融機構持有金融商品之風險及相互影響程度，以找出影響系統風險之重要金融機構。

參考文獻

Study Center Gerzensee Course on Advanced Topic in Empirical Finance, February 2019.

- Michael Rockinger. Forwards and Futures.
- Michael Rockinger. Lecture notes on options and the information content of options.
- Michael Rockinger. Options and Risk-Neutral-Densities: Illustrations

Bahra, B. （1997）. Implied risk-neutral probability density functions from option prices: Theory and application. *Bank of England working paper,* No. 66, July.

Campa, J., P.H. Kevin Chang, Reider, R. L.（1997）. ERM Bandwidths for EMU and after Evidence from Foreign Exchange Options. *Economic Policy*, Volume 12, Issue 24, 53–89

Gemmill, G. and Saflekos A. （2000）. How Useful are Implied Distributions? Evidence from Stock-Index Options. *The Journal of Derivatives* 7（3）:83-91.

Haugh, M.（2009） Black-Scholes and the Volatility Surface

Jermann, U. J. （2017）.Financial Markets' Views about the Euro-Swiss Franc Floor. Journal of Money, Credit and Banking, vol 49（2-3）, 553-565.

Melick, W. and Thomas, C. P.（1997）. Recovering an Asset's Implied PDF from Option Prices: An Application to Crude Oil during the Gulf Crisis. *Journal of Financial and Quantitative Analysis* 32（01）:91-115

Peter Nowak and Patrick Sibetz（2012）Volatility Smile

Ritchey, R. J. （1990）. Call option valuation for discrete normal mixtures. *Journal of Financial Research* 13, 285-296

Söderlind, P. and Svensson, L. （1997）. New Techniques to Extract Market Expectations from Financial Instruments. *NBER Working Paper* No. 5877.

張瓊方（2006），由市場的選擇權價格還原風險中立機率分布，國立政治大學應用數學系碩士論文。

廖彥茹（2006），還原風險中立機率測度的雙目標規劃模型，國立政治大學應用數學系碩士論文。

許溪南（2017），選擇權交易原理與實務，Smart 智富。