



國立交通大學
National Chiao Tung University

出國報告（出國類別：**出國短期研究**）

複體上的 zeta 函數與其黎曼猜想

服務機關：**應用數學系**

姓名職稱：**康明軒 助理教授**

前往國家：**德國**

出國期間：**101/07/09-07/23**

報告日期：**102/01/17**

一、摘要 (200-300 字)

這次移地研究(7/9~7/24)為期兩個禮拜，主要是前往德國柏林的洪堡大學和格羅伯-克隆恩教授進行學術交流。我們主要將計算複體的 ζ 函數西表現上的特徵值，從而可以證明此 ζ 函數上類似於魏依猜想的結果。

在兩個禮拜的過程中，我先在洪堡大學數學系給了一個近期工作的演講並且拜訪了其他相關領域的學者。此外，參加了一個題目為布哈-提茲樹狀圖上的作用群分解理論的演講，剛好是對應到我們所考慮的複體在一維的情形。

在研究方面，我們首先釐清 ζ 函數與這個複體基本群的上同調群的關係，主要是透過夏皮羅引理，可以把基本群的上同調群過渡到 GL_n 的表現上。對於 ζ 函數奇點的計算，我們原本的方法是利用雷勒閔司基對 GL_n 表現的分類定理，作數學歸納法。克隆恩教授建議不妨使用路易斯基參數化的方法作為計算的基礎，得以對每個單獨的表現做計算，而避免使用歸納法，進而解決原本的問題。另一方面對於三維和四維的情形，我們羅列所有可能的西表現的分類，進而逐類計算 ζ 函數奇點的分布。我們接下來將對路易斯基參數法做進一步的學習與研究，希望能夠在原本的問題有所進展。

此外，我們研究了強拉瑪奴江複體和 ζ 函數的分布的問題。我們可以這證明那些非平凡的奇點都落在一個半平面上，並且從低維的情形，可以預測它們坐落的帶狀區間。

二、目次

三、本文

（一）目的.....	P.4
（二）過程.....	P.4
（三）心得及建議.....	P.7

三、本文

(一) 目的

我們主要將計算複體的 zeta 函數在 $\mathbb{A}^1$ 表現上的特徵值，從而可以證明此 zeta 函數上類似於魏依猜想(Weil Conjecture)的結果。換言之，我們希望得到 zeta 函數奇點分布的一個好的描述。魏依猜想最重要的一部分是關於代數多樣體的 zeta 函數的特徵值大小的估計，這也是數學大師德利涅(Deligne)最廣為人知的工作之一，其重要性不可言喻。

格羅伯-克隆恩(Groth-Klonne)教授是表現理論與模型式的專家，特別對於 p -adic 的可約子群有深刻的了解。在我們原本的研究中，我們既有的方法只可以計算出 zeta 函數在某一類表現上的特徵值，但是對於那些特徵值源自的 $\mathbb{A}^1$ 表現卻是難直接計算。希望在他的協助下，可以解決這個問題。

(二) 過程

以下是這次行程表

2012. 7.9 第 1 天 星期一	上午	從台灣出發
	下午	
2012. 7.10 第 2 天 星期二	上午	抵達德國柏林
	下午	專題演講: Zeta functions on p -adic Lie groups。
2012. 7.11 第 3 天 星期三	上午	與洪堡大學數學系教授交流
	下午	與克隆恩教授老師進行研討
2012. 7.12 第 4 天 星期四	上午	撰寫論文
	下午	與林克教授老師進行研討
2012. 7.13 第 5 天 星期五	上午	撰寫論文
	下午	與克隆恩教授老師進行研討
2012. 7.14 第 6 天 星期六	上午	撰寫論文
	下午	撰寫論文
2012. 7.15 第 7 天 星期日	上午	撰寫論文
	下午	撰寫論文

2012. 7.16 第 8 天 星期一	上午	撰寫論文
	下午	與克隆恩教授老師進行研討
2012. 7.17 第 9 天 星期二	上午	撰寫論文
	下午	參加克隆恩教授學生論文口試
2012. 7.18 第 10 天 星期三	上午	撰寫論文
	下午	與克隆恩教授老師進行研討
2012. 7.19 第 11 天 星期四	上午	撰寫論文
	下午	與克隆恩教授老師進行研討
2012. 7.20 第 12 天 星期五	上午	撰寫論文
	下午	與克隆恩教授老師進行研討
2012. 7.21 第 13 天 星期六	上午	撰寫論文
	下午	撰寫論文
2012. 7.22 第 14 天 星期日	上午	撰寫論文
	下午	撰寫論文
2012. 7.23 第 13 天 星期一		返回台灣

我在 7/10 中午抵達了洪堡大學數學系，拜會了這次主要訪問的克隆恩教授，並由他引薦了其他相關領域的如林克(Zink)等。當天下午，我給了一個近期工作的演講，題目為 Zeta functions on p-adic Lie groups。之後拜訪了其他相關領域的學者有些遺憾的是此時剛好是德國的學期末，平常正規的學術演講都已經結束。另一方面，恰逢克隆恩教授的碩士班的學生要進行碩士論文口試，他也特別邀請我去旁聽。演講的主題為布哈-提茲樹狀圖上的作用群分解(Decomposition of groups acting on Bruhat-Tits tree of PGL_2)，和我們研究的主題頗有關聯，剛好是對應到一維複體的情形。這是個相當有意思的演講，對方從幾何的觀點切入，所以它的自同構群是一個比 PGL_2 更大的群，但是上面幾乎擁有所有在 PGL_2 上所知的分解定理。我們的做法也是從幾何的觀點切入，而複體本身的刻畫並不完全依賴於 PGL_n 的結構。這表示我們有可能將整個理論推到其他更大群，如複體自同構群的子群。

克隆恩教授對於複體上的 zeta 函數很有興趣，特別是 zeta 函數與這個複體基本群的上同調群的關係。一般來說，透過夏皮羅引理(Shapiro Lemma)，可以把

基本群的上同調群過渡到 GL_n 的表現上。對於 zeta 函數奇點的計算，我們原本的方法是利用雷勒閔司基(Zelevinsky)的 GL_n 表現的分類定理，作為歸納法的基礎，進而得到奇點的分布。因為我們可以把問題化為計算的 parahoric 哈克代數(Hecke Algebra)的計算，克隆恩教授建議不妨使用路易斯基參數化的方法(Lusztig parameterization)作為計算的基礎，得以對每個單獨的表現做的計算，而避免使用歸納法，進而解決原本的問題。另一方面，在三維的情形，根據泰迪克(Tadic)的西表現的分類定理。從他們誘導的 parabolic 子群的形態，可以分為五個子類。而四維的情形，則可以分為八個子類。此時當複體是所謂的拉瑪奴江複體(Ramanujan complex)，對於這些所有的子類，我們都可逐類計算 zeta 函數奇點的分布。不過暫時還看不出如果將這些計算直接推廣到一般的情形。我們接下來將對路易斯基參數法做進一步的學習與研究，希望能從這個方面的突破。

另一方面，在一維的情形，一個圖 X 的 zeta 函數上的黎曼猜想成立，若且為若 X 是一個拉瑪奴江圖。從群表現的觀點來看，這等價於他所有平方可積的正規表現的球面(spherical)不可約子表現都是溫馴的(tempered)。在高維的情形，我們先考慮所謂的強拉瑪奴江複體，也就是他的所有無窮維正規表現的若球面(Iwahori-spherical)不可約子表現都是溫馴的。此時利用他的矩陣系數是 $(2+\varepsilon)$ 可積的性質，我們可以證明以下的結果

定理: For a strong Ramanujan complex X from PGL_n , the nontrivial poles of its i -th Zeta function $Z_i(X, q^s)$ of type j lie on the $\text{Re } s \leq (n-j)/2$ 。

在這裡我們簡述一下證明的過程。型態 j 的 i -維 zeta 函數的奇點是由型態為 $\mu = (j_1, j_2, \dots, j_k)$ 的 parahoric Hecke 算子 T_μ 的特徵值 λ 所決定，其中 μ 是 n 的一個有序的分割(ordered partition)。上述定理等價於證明 $|\lambda| \leq q^{n(n-j)/2}$ 。不難驗證對於所有的正整數 m ， T_μ^m 還是一個單一的 parahoric Hecke 算子，並且她的體積是 T_μ 的 $q^{mn(n-j)/2}$ 倍。現在選定一個對應於 λ 的單位特徵向量 v 。此時這個溫馴表現(tempered representation)在 (v, v) 上的矩陣系數的 $(2+\varepsilon)$ 的範(norm)，透過 Holder 不等式，會大於等於一個由 $|\lambda|^{(2+\varepsilon)} q^{-n(n-j)}$ 幕次所構成的幾何級數。因為矩陣系數是 $(2+\varepsilon)$ 可積的，表示這個幾何級數必須要收斂。因此我們得到了這個特徵值的上界。

注意的是對於西特徵的主系列表現(principal series representation attached to an unitary character)，他們所對應的奇點都分布在 $\text{Re } s = (n-j)/2$ 的線上。換言之，我們的上界是最佳的(sharp)。另外，當這個特徵函數(character)不是西(unitary)並且其所對應的主系列表現是可約的情形下，它包含了若干個不可約的子商(subquotient)表現。這些表現所給出的 zeta 函數的奇點實部會對稱的分佈在 $\text{Re } s = (n-j)/2$ 的線的兩側。上述定理等於是說溫馴的子表現總是給了實部比較小的奇點。這個結果可以視為是複體 zeta 函數的黎曼假設。於是我們給了以下的猜想

猜想: 一個複體是強拉瑪奴江複體若且唯若他的 zeta 函數滿足黎曼假設。

從已知的例子來看，我們應當可以對這些溫馴表現的奇點分布有更進一步的

了解，也就是對於要給予這些奇點的實部一個最佳的下界。我們有以下的猜想：

猜想： 型態 j 的 zeta 函數其非平凡的奇點分布在 $(n-j)/2 \leq \operatorname{Re} s \leq (n-j)/2$ 這個帶狀區間。

如此一來，根據我們證明的 zeta 等式：所有 zeta 函數的交錯乘積等於 $(1-u^n)$ 的 g 次方，其中 g 是該複體的歐拉示性數。我們將可以證明：把不同維度但型態同為 j 的 zeta 函數做交錯乘積，會得到一個有理函數 $P_j(X, q^{-1})$ 。這個函數 $P_j(X, q^{-1})$ 的零點和奇點都是分布在 $\operatorname{Re} s = (n-j)/2$ 的線上。這是一個很強的證據，暗示了這個複體的 zeta 函數應當與某個代數多樣體 zeta 函數有關。

更具體的說，有理函數 $P_j(X, q^{-1})$ 在移除掉 1 維表現所貢獻的因子後，將會是一個多項式。從一維的情形推斷，這個多項式，它理當會對應到一個志村(Shimura)代數多樣體的 zeta 函數在 j -維的 étale 上同調群的 Frobenius 變換的特徵多項式。當然這是一個非常困難的問題，即使在 1 維的情形，這個對應關係也是數論裡很深的結果。

對於第二個的猜想的證明，我們有些初步的構想，基本上有兩個可行的方法。第一個是尋找 Iwahori Hecke 代數上是適當的乘方(involution)。一般來說透過乘方可以把原本上界的結果轉換成下界的結果。然而我們必須要求這些乘方會保持溫馴性，也就是要把溫馴表現對應到溫馴表現。但是一般所知的 Iwahori Hecke 上的乘方，例如岩堀松本乘方(Iwahori-Matsumoto involution)，都無法保持這的性質。

第二個方法是把這些溫馴的表現看成主系列表現的子表現，把她的 parahoric 固定子空間給予一個具體的描述。這個空間可以寫成一堆交互算子(intertwining operator)的核(kernel)的交集。卡索門(Casselman)給了這些算子的一個簡單的表示式，使得我們可以具體的把這個子空間的基底找出來，進而可以計算那些算子在這個子空間上的特徵值。然而卡索門的結果，對於主系列表現有些要求，也就是這些主系列表現必須是從一個正規特徵函數(regular character)所誘導出來的。一般來說，我們是不能假設非正規的主系列表現不會出現在我們所考慮的表現空間中。因此，我們必些另外處理非正規表現的問題。

以上兩種方法，都有他的困難之處，不過第二個方法目前看起來比較有機會可以解決，我們將在之後繼續努力解決這個問題。

(三) 心得及建議

感謝校方提供這個難得的機會，讓我有機會到國外一流大學進行交流。在學校同仁的協助下，這次的旅程從申請到結束都非常的順利。平常在學校，雖然在同一個大的領域也有其他教授可以討論，但是往往有興趣的問題不盡相同，在剛開始的時候比較難有合作機會。所以這個計畫讓我在這一年能夠有時間和國外學者做比較有效率的討論與合作，真的是讓我收穫良多。所以希望校方可以持續提供類似的計畫給予新進人員。