行政院及所屬各機關出國報告
（出國類別：其他）

參加瑞士中央銀行基金會研究中心舉辦之「貨幣經濟學進階議題」訓練課程出國報告書

服務機關：中央銀行
出國人 職 稱：研究員
姓 名：吳懿娟

出國地區：瑞士
出國時間：民國 96 年 9 月 1 日至 96 年 9 月 16 日
報告日期：民國 96 年 12 月 18 日

參加瑞士中央銀行基金會研究中心舉辦之「貨幣經濟學進階議題」訓練課程出國報告書

目錄

參加瑞士中央銀行基金會研究中心舉辦之「貨幣經濟學進階議題」訓練課程出國報告書

1. 前言

職奉派於民國 96 年 9 月 1 日至 9 月 16 日參加瑞士中央銀行基金會位於瑞士首都伯恩市郊之研習中心(Study Center Gerzensee)所主辦之「貨幣政策進階議題」(Advanced Topics in Monetary Economics II)訓練課程。本次課程來自不同國家央行的參與學員共計 23 人。

本課程歷時兩週，講授課程的兩位教授在其相關領域皆頗富盛名。第一週由 Fabio Canova 教授主講，著重於動態隨機一般均衡模型(dynamic stochastic general equilibrium models, 簡稱 DSGE 模型)及相關的求解方法；第二週則由 Carl E. Walsh 教授主講，著重於和貨幣政策相關之近期貨幣經濟研究，強調理論架構及政策意涵，貨幣與財政政策的交互關係，以及不確定性及學習等對政策設定之隱含意義。包括貨幣政策傳遞機制、貨幣政策的影響、政策的合宜目標。利用 DSGE 模型為分析架構，深入探討貨幣理論與重要貨幣政策相關議題。

實質景氣循環(RBC) 模型與新凱因斯(New Keynesian)模型為兩種基準的 DSGE 模型。最早由 Kydland 與 Prescott（1982）提出的 RBC 模型，係基於家計部門與廠商最適化行為的跨期一般均衡模型。近年新凱因斯 DSGE 模型日益被視為有助於總體經濟政策分析之有效工具。

本報告第 2 節與第 3 節，簡要說明和研習課程相關的 2 個重要議題，其中，第 2 節為貨幣政策分析的新凱因斯模型之概述。由於國內關於 DSGE 模型的實證研究較少，而本次研習課程有關 DSGE 模型部份內容較為技術性，為俾於初學者對 DSGE 模型的瞭解，本報告第 3 節嘗試參照 Barnett 與 Martin(2005)，簡要說明基本 DSGE 模型的理論模型、實務處理方法、模型求解技巧等。

2. 貨幣政策分析的新凱因斯模型[1]

於 DSGE 模型中考慮某種程度的名目僵固性(nominal rigidities)，俾進行政策分析。

- 新凱因斯模型包括 3 個基本成份：
  - 預期 IS 曲線
  - 通膨調整方程式
  - 政策行為的設定

- 基本特性：
  - 家計部門：消費購買商品、提供勞動力給不完全競爭的廠商，持有貨幣及債券
  - 廠商：雇用勞動力、生產商品。每個廠商訂定其生產商品的價格，但並非每一期所有廠商皆得以重新訂價（價格僵固性）。
  - 家計部門與廠商的最適化行為：家計部門的預期效用與廠商利潤之折現值極大化。
  - 由於價格具有僵固性，因此貨幣政策於短期具有實質影響效果。

2.1 家計部門：一個代表性的家計部門(the representative household)的效用函數如下：

$$\boxed{E\sum_{i=0}^{\infty}\beta^{i}\left[\frac{C_{t+i}^{1-\sigma}}{1-\sigma}+\frac{\gamma}{1-b}\left(\frac{M_{t+i}}{P_{t+i}}\right)^{1-b}-\chi\frac{N_{t+i}^{1+\eta}}{1+\eta}\right]} \qquad (1)$$

其中，C_t：為一籃的消費商品(composite goods)

$\frac{M}{P}$：實質貨幣餘額

[1] 參考 Walsh(2003)、Campbell Leith 之 Lecture 1, The New Keynesian Model of Monetary Policy.

$1-N_t$：閒暇時間(leisure)

N_t：勞動力供給（投入市場就業的工時）

C_j：廠商 j 生產產品 j

- 消費商品籃在家計部門的效用函數被定義如下：

$$C_t = \left[\int_0^1 c_{jt}^{\frac{\theta-1}{\theta}} dj\right]^{\frac{\theta}{\theta-1}} \quad , \quad \theta > 1 \tag{2}$$

其中，參數θ為對個別產品的需求彈性

家計部門支出決策的兩個階段：

- 在給定之C_t下，以最小成本購買個別商品組合以達成C_t。（不同商品的支出決策）
- 在給定之C_t成本下，家計部門選取最適之C_t、N_t、M_t。（跨期決策，intertemporal decision）

(1) 在給定之C_t下，購買C_t成本極小化

家計部門的決策問題化為下式：

$$\min_{C_{jt}} \int_0^1 p_{jt} c_{jt} dj$$

受限於 $$\left[\int_0^1 c_{jt}^{\frac{\theta-1}{\theta}} dj\right]^{\frac{\theta}{\theta-1}} \geq C_t \tag{3}$$

其中p_{jt}為 j 產品價格；

令ψ_t為限制式之 Lagrangian 乘數，則 j 產品的一階條件為

$$p_{jt} - \psi_t \left[\int_0^1 c_{jt}^{\frac{\theta-1}{\theta}} dj\right]^{\frac{\theta}{\theta-1}} c_{jt}^{-\frac{1}{\theta}} = 0$$

經由(2)式，則上式可化為：

$p_{jt}-\psi_t C_t^{\theta}\, c_{jt}^{-\frac{1}{\theta}}=0$，重排為下式：

$$c_{jt}=\left[\left(\frac{p_{jt}}{\psi_t}\right)^{-\theta}C_t\right]$$

經由(2)式，$C_t=\left[\int_0^1\left[\left[\frac{p_{jt}}{\psi_t}\right]^{-\theta}C_t\right]^{\frac{\theta-1}{\theta}}dj\right]^{\frac{\theta}{\theta-1}}=\left(\frac{1}{\psi_t}\right)^{-\theta}\left[\int_0^1 p_{jt}^{1-\theta}dj\right]^{\frac{\theta}{\theta-1}}C_t$

則 $\psi_t=\left[\int_0^1 p_{jt}^{1-\theta}dj\right]^{\frac{1}{1-\theta}}\equiv P_t$ (4)

Lagrangian 乘數（ψ_t）為消費之總物價指數

對 j 產品需求可表為 $\boxed{c_{jt}=\left(\frac{p_{jt}}{P_t}\right)^{-\theta}C_t}$ (5)

對 j 產品的需求彈性為θ，當$\theta\to\infty$，個別產品成為近似替代品的程度愈強，趨近於完全競爭使個別廠商之市場能力愈弱。

家計部門之預算限制式：

由(4)式總物價指數，家計部門之實質預算限制式如下：

$$C_t+\frac{M_t}{P_t}+\frac{B_t}{P_t}=\left(\frac{W_t}{P_t}\right)N_t+\frac{M_{t-1}}{P_t}+(R_{t-1})\left(\frac{B_{t-1}}{P_t}\right)+\Pi_t \quad (6)$$

其中M_t（B_t）為家計部門持有之名目貨幣（一期債券），R_t為債券總的名目利率(gross nominal rate of interest)，來自不完全競爭廠商的實質利潤為Π_t。

(2)在給定之C_t成本下，家計部門選取最適之C_t、N_t、M_t

亦即家計部門在(6)式下，選取最適之C_t、N_t、M_t以使(1)式極大化。

在均衡情況下，下列條件必須成立：

- **最適跨期消費分配的 Euler 條件**

$$\boxed{C_t^{-\sigma} = \beta R_t E_t\left(\frac{P_t}{P_{t+1}}\right)C_{t+1}^{-\sigma}} \qquad (7)$$

- **最適貨幣持有的條件**

$$\boxed{\frac{\gamma\left(\frac{M_t}{P_t}\right)^{-b}}{C_t^{-\sigma}} = \frac{R_t - 1}{R_t}} \qquad (8)$$

- **最適勞動供給的條件**

$$\boxed{\frac{\chi N_t^{\eta}}{C_t^{-\sigma}} = \frac{W_t}{P_t}} \qquad (9)$$

2.2 廠商部門：

- 在下列 3 個限制下，追求利潤極大化：
  - 假設無資本，產出為勞動投入（ N_{jt} ）及總生產力干擾之函數 (aggregate productivity disturbance, Z_t)

    $c_{jt} = Z_t N_{jt}$ ， $E(Z_t) = 1$
  - 每個廠商面臨的需求曲線，參見(5)式
  - 每一期某些廠商無法調整訂價，在此參考 Calvo(1983)價格僵固性模型設定，導入名目慣性(nominal inertia)。

<u>價格調整</u>

假設每一期可以調整其價格的廠商係隨機選取的，$1-\omega$ 為可改變其訂價之廠商家數比率，ω 為無法改變價格者之比率。參數 ω 衡量名目僵固性之程度，ω 值愈高，隱含每一期較少的廠商可改變其訂價，因此價格變動的預期時程較長。

在 t 期可改變其訂價之廠商，其將調整價格以追求目前及未來的預期利潤折現值極大化

- 廠商決策問題

(1)　成本極小化

廠商在生產（$c_{jt}=Z_t N_{jt}$）限制下，使生產成本（$W_t N_t$）極小化：

$$\min_{N_t} W_t N_t + \varphi_t^n (c_{jt} - Z_t N_{jt})$$

其中，φ_t^n 為廠商之名目邊際成本，

一階條件隱含 $W_t = \varphi_t^n Z_t$　或 $\varphi_t^n = \dfrac{W_t}{Z_t}$

則實質邊際成本 $\varphi_t = \dfrac{W_t}{P_t Z_t}$（或 $mc_t = \dfrac{W_t / P_t}{Z_t}$）

(2)　訂價決策

亦即決定 p_{jt}，俾使下式極大化：

$$E_t \sum_{i=0}^{\infty} \omega^i \Delta_{i,t+i} \Pi(\frac{p_{jt}}{P_{t+i}}, \varphi_{t+i,} c_{t+i})$$

$$= E_t \sum_{i=0}^{\infty} \omega^i \Delta_{i,t+i} \left[\left(\frac{p_{jt}}{P_{t+i}} \right)^{1-\theta} - \varphi_{t+i} \left(\frac{p_{jt}}{P_{t+i}} \right)^{-\theta} \right] C_{t+i}$$

其中，折現因子(discount factor) $\Delta_{i,t+i} = \beta^i (\frac{C_{t+i}}{C_t})^{-\sigma}$

利潤　$\Pi(p_{jt}) = \left[\left(\frac{p_{jt}}{P_{t+i}} \right) c_{jt+i} - \varphi_{t+i} c_{jt+i} \right]$

➢由於在 t 期可改變其訂價之廠商，其訂價皆面臨相同的問題，因此可調整訂價之廠商將設定相同價格。假設此最適價格為 p_t^*，其一階條件如下：

$$E_t\sum_{i=0}^{\infty}\omega^i\Delta_{i,t+i}\left[(1-\theta)\left(\frac{1}{p_t^*}\right)\left(\frac{p_t^*}{P_{t+i}}\right)^{1-\theta}+\theta\varphi_{t+i}\left(\frac{1}{p_t^*}\right)\left(\frac{p_t^*}{P_{t+i}}\right)^{-\theta}\right]$$

運用折現因子公式：$\Delta_{i,t+i}=\beta^i(\frac{C_{t+i}}{C_t})^{-\sigma}$

$$\left(\frac{p_t^*}{P_t}\right)=\left(\frac{\theta}{\theta-1}\right)\frac{E_t\sum_{i=0}^{\infty}\omega^i\beta^iC_{t+i}^{1-\sigma}\varphi_{t+i}\left(\frac{p_{t+i}}{P_t}\right)^{\theta}}{E_t\sum_{i=0}^{\infty}\omega^i\beta^iC_{t+i}^{1-\sigma}\left(\frac{p_{t+i}}{P_t}\right)^{\theta-1}} \qquad (10)$$

➢ **彈性價格情況下之均衡：**

假設每一期所有廠商皆可改變其訂價(ω=0)

$$\left(\frac{p_t^*}{P_t}\right)=\left(\frac{\theta}{\theta-1}\right)\varphi_t=\mu\varphi_t \qquad (11)$$

其中，(加成部份，markup) $\mu>1$

所有廠商設定其最適價格(p_t^*)高於名目邊際成本($P_t\varphi_t$)，顯示廠商具有市場力量。

當價格皆為彈性時，所有廠商設定相同價格，因此無相對價格差異，故(11)式化為： $1=\left(\frac{\theta}{\theta-1}\right)\varphi_t=\mu\varphi_t$

$$\varphi_t=\mu^{-1}$$

運用實質邊際成本定義，則$\frac{W_t}{P_t}=\frac{Z_t}{\mu}$

由(9)式勞動供給條件，實質工資亦等於閒暇與消費間之邊際替代率，以符合家計部門之最適行為：

$$\frac{\chi N_t^{\eta}}{C_t^{-\sigma}}=\frac{Z_t}{\mu} \tag{12}$$

考慮對數線性化(log-linearize)，將(12)式左右兩邊取自然對數： $\ln(\frac{\chi N_t^{\eta}}{C_t^{-\sigma}})=\ln(\frac{Z_t}{\mu})$

進行全微分並代入均衡值，$\frac{1}{\bar{Z}}dZ_t=\frac{1}{\bar{N}}\eta\, dN_t+\frac{1}{\bar{C}}\sigma\, dC_t$

令 $\hat{x}$ 表變數 X_t 偏離其均衡狀態(steady state)的百分比，$\hat{x}=\frac{dX_t}{\bar{X}}$

則在均衡狀態下，(12)式化為 $\eta\,\hat{n}_t+\sigma\hat{c}_t=\hat{z}_t$

由於 $\hat{y}_t=\hat{n}_t+\hat{z}_t$ ，且 $\hat{y}_t=\hat{c}_t$

彈性價格下之均衡產出可表為：

$$\boxed{\hat{y}_t^{f}=\left[\frac{1+\eta}{\eta+\sigma}\right]\hat{z}_t} \tag{13}$$

在彈性價格下，產出波動係源自於生產力衝擊，由於其係反映私部門對生產力衝擊之最適反應，因此，毋須採取政策來抵銷產出波動。

- **僵固價格情況下之均衡：**

當價格具僵固性(ω>0)，則廠商在設定價格 p_t^* 時須考量「預期未來及目前之邊際成本」。

總物價水準為$1-\omega$ 比率之廠商在 t 期之設定價格，與ω 比率之廠商在 t 期以前設定之價格的加權平均。由於可調整價格之廠商係由所有廠商中隨機選取，因此，不能調整價格廠商之平均價格即為所有廠商在 t-1 期之平均價格。故 t 期之平均價格滿足下式：

$$\boxed{P_t^{1-\theta}=(1-\omega)(p_t^*)^{1-\theta}+\omega P_{t-1}^{1-\theta}} \tag{14}$$

通膨調整

將(10)式與(14)式予以對數線性化處理後，化為通膨率方程式。亦即採用 p_t^* 的一階條件，近似估計(approximating)平均通膨率為 0、彈性價格均衡。

$$\boxed{\pi_t = \beta E_t \pi_{t+1} + \tilde{\kappa}\hat{\varphi}_t} \qquad (15)$$

其中，$\tilde{\kappa} = \dfrac{(1-\omega)(1-\beta\omega)}{\omega}$

(15)式通常被視為新凱因斯菲力浦曲線。

前瞻式(forward-looking)通膨調整

新凱因斯菲力浦曲線為前瞻式通膨調整。廠商設定其價格時必須關切未來通膨走勢，因為其在未來一段期間很可能無法調整售價。

往前求解，$\pi_t = \tilde{\kappa}\sum_{i=0}^{\infty}\beta^i E_t \hat{\varphi}_{t+i}$

通膨率為目前及未來實質邊際成本折現值之函數，而非如傳統之菲力浦曲線將通膨率直接表為「實際產出減潛在產出」或「失業率減自然失業率」之函數。

實質邊際成本與產出缺口

廠商之實質邊際成本等於實質工資除以勞動的邊際生產力

$$\varphi_t = \frac{W_t}{P_t Z_t}$$

由於假設名目工資為完全彈性，實質工資必須等於閒暇與消費間之邊際替代率。

在彈性價格均衡下，所有廠商設定相同價格，因此(11)式隱含$\varphi_t = \mu^{-1}$。由(9)式，$\hat{w}_t - \hat{p}_t = \eta\hat{n}_t + \sigma\hat{y}_t$

由於 $\hat{y}_t = \hat{n}_t + \hat{z}_t$ ，且$\hat{y}_t = \hat{c}_t$

實質邊際成本偏離彈性價格均衡之百分比為

$$\hat{\varphi}_t = (\eta\hat{n}_t + \sigma\hat{y}_t) - \hat{z}_t = (\eta + \sigma)\left[\hat{y}_t - (\frac{1+\eta}{\eta+\sigma})\hat{z}_t\right]$$

由(13)式，則可表為下式：

$$\hat{\varphi}_t = (\eta + \sigma)\left[\hat{y}_t - \hat{y}_t^f\right] \tag{16}$$

通膨調整方程式(15)因此可表為下式

$$\boxed{\pi_t = \beta E_t \pi_{t+1} + \kappa x_t} \tag{17}$$

其中， $\kappa = (\eta + \sigma)\tilde{\kappa} = (\eta + \sigma)(1-\omega)(1-\beta\omega)/\omega$

$x_t \equiv \hat{y}_t - \hat{y}_t^f$ 為實際產出與彈性價格均衡產出間之缺口

此種**通膨調整或前瞻菲力浦曲線**係將通膨率表為和「實際產出偏離無名目僵固性下之產出（彈性價格均衡產出）」缺口相關聯。

2.3 模型的需求面

由(7)式最適消費選擇的 Euler 條件：

$$C_t^{-\sigma} = \beta R_t E_t\left(\frac{P_t}{P_{t+1}}\right)C_{t+1}^{-\sigma}$$

針對均衡狀態之線性化處理：

$-\sigma\hat{c}_t = (\hat{i}_t - E_t p_{t+1} + p_t) - \sigma E_t \hat{c}_{t+1}$ 或

$\hat{c}_t = E_t \hat{c}_{t+1} - (\frac{1}{\sigma})(\hat{i}_t - E_t p_{t+1} + p_t)$

商品市場均衡(假設無資本)

$Y_t = C_t$

Euler 條件化為下式：

$$\boxed{\hat{y}_t = E_t \hat{y}_{t+1} - (\frac{1}{\sigma})(\hat{i}_t - E_t p_{t+1} + p_t)} \tag{18}$$

此為**預期之 IS 曲線**。

需求與產出缺口

將(18)式表為產出缺口型式：$x_t \equiv \hat{y}_t - \hat{y}_t^f$

$\hat{y}_t - \hat{y}_t^f = E_t(\hat{y}_{t+1} - \hat{y}_{t+1}^f) - (\frac{1}{\sigma})(\hat{i}_t - E_t p_{t+1} + p_t) + (E_t \hat{y}_{t+1}^f - \bar{y}_t^f)$ 或

$$x_t = E_t x_{t+1} - (\frac{1}{\sigma})(r_t - r_t^n) \tag{19}$$

其中，$r_t = \hat{i}_t - E_t p_{t+1} + p_t$

$r_t^n \equiv \sigma(E_t y_{t+1}^f - \hat{y}_t^f)$

名目利率利率係藉由實質利率缺口($r_t - r_t^n$)來影響產出。

2.4 一般均衡模型

兩條方程式：(17)與(19)式

$$\boxed{\pi_t = \beta E_t \pi_{t+1} + \kappa x_t}$$

$$\boxed{x_t = E_t x_{t+1} - (\frac{1}{\sigma})(\hat{i}_t - E_t \pi_{t+1} - r_t^n)}$$

此和下述情況係一致的：

- 家計部門和廠商的最適化行為
- 符合預算限制
- 市場均衡

由於模型有兩條方程式，但有 3 個未知數(x_t、π_t、i_t)，因此需要設定貨幣政策。

<u>模型求解—理性預期均衡</u>

(1)　假設名目利率為外生

將模型化為狀態空間形式：

$$\begin{bmatrix} \beta & 0 \\ \frac{1}{\alpha} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_t \pi_{t+1} \\ E_t x_{t+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -\kappa \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \pi_t \\ x_t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sigma} \end{bmatrix} (i_t - r_t^n) \qquad 或$$

$$\begin{bmatrix} E_t \pi_{t+1} \\ E_t x_{t+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\beta} & \frac{-\kappa}{\beta} \\ \frac{1}{-\sigma\beta} & 1 + \frac{\kappa}{\sigma\beta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \pi_t \\ x_t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sigma} \end{bmatrix} (i_t - r_t^n)， \qquad 或$$

$$E_t Z_{t+1} = A Z_t + B(i_t - r_t^n)$$

假如係數 A 矩陣之不穩定特徵根的數目，等於前瞻(forward looking)變數的數目(在此為 2)，則此模型具有單一、穩定的理性預期均衡解。

惟此條件並未成立。因此，模型假設名目利率為外生($i_t = r_t^n$)，並未導致單一的理性預期均衡。很可能出現自我實現(self-fulling)預期通膨率上揚。

(2)假設名目利率依循簡單法則$\boxed{i_t = r_t^n + \delta\pi_t}$

將模型化為狀態空間形式：

$$\begin{bmatrix} \beta & 0 \\ \frac{1}{\sigma} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_t \pi_{t+1} \\ E_t x_{t+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -\kappa \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \pi_t \\ x_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sigma} \end{bmatrix} \delta\pi_t， \quad 或$$

$$\begin{bmatrix} E_t\pi_{t+1} \\ E_t x_{t+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{\beta} & \dfrac{-\kappa}{\beta} \\ \dfrac{\beta\delta-1}{\sigma\beta} & 1+\dfrac{\kappa}{\sigma\beta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \pi_t \\ x_t \end{bmatrix}$$

- 此模型之係數矩陣之不穩定特徵根的數目為 2 之條件須為

  $\boxed{\delta > 1}$ ，參見 Bullard 與 Mitra(2002)。其意涵為：貨幣政策必須對通膨情勢予以強烈反應。名目利率變動大於通膨變動，亦即超過 1 比 1 的變動，此為泰勒原則(The Taylor principle)。

- 貨幣政策應針對內生變數作出反應，而不是針對外生的干擾而作出反應。
- 如果貨幣政策的利率法則除通膨外亦考慮產出缺口，如下式：

  $\hat{i}_t = \delta_\pi \pi_t + \delta_x x_x + v_t$ （為泰勒法則型式）

  模型具有單一、穩定的理性預期均衡解的條件（參見 Bullard 與 Mitra(2002)）： $\kappa(\delta_\pi - 1) + (1-\beta)\delta_x > 0$

3.動態隨機一般均衡(DSGE)模型[2]

3.1 DSGE 模型之概述

動態隨機一般均衡模型(Dynamic Stochastic General Equilibrium)，簡稱為DSGE模型。

3.1.1 兩種基準的DSGE模型[3]

實質景氣循環(RBC)與新凱因斯(New Keynesian) 模型為兩種基準的 DSGE 模型。

(1) RBC 模型：自 Kydland 與 Prescott(1982)以來的相關研究，例如，Kydland 與 Prescott(1982)、Long 與 Plosser(1983)、Hansen(1985), Prescott(1986)，以及 King、Plosser 與 Rebelo(1988)等。

- 核心概念：藉由新古典成長模型來解釋經濟變動。經濟波動係源自於生產力的隨機波動與經濟活動參與者的最適反應。此模型毋需貨幣。
- 模型方法：以個體為基礎(microfoundations)、動態一般均衡、理性預期。
- 政策意涵：依據 RBC 模型，經濟波動係對於技術變動率之不確定性的最適反應。從政策決策者的觀點而言，毋須擔心景氣循環波動，如同 Prescott(1986)所述，嘗試穩定景氣循環波動的努力，很可能造成反作用。

(2) 新凱因斯 DSGE 模型：從動態一般均衡觀點分析總體時間數列。

- 核心假設為名目僵固性(nominal rigidities)—價格僵固性
- 政策因而扮演重要角色—例如，泰勒法則。

[2] 參考 Muller Gernot 與 Roland Straub(2007)。
[3] 參考 Muller 與 Straub(2007);Canova(2007)授課講義有此兩種模型設定說明。

3.1.2 新凱因斯 DSGE 模型之簡介

(1) 家計部門

家計部門的特性為效用極大化與消費平滑 (consumption smoothing)。在預算限制下，追求「自目前至無限的未來」的預期效用折現值(discounted value)的極大化。

以下簡單說明兩期(two period)、確定情況下的家計部門消費行為。其結果可被推論至無限期(infinite horizon)、具不確定性之隨機問題。

- 效用函數

$$\max_{c_0} U(C_0)+\beta U(C_1)$$

由 $d\overline{U}=U'(C_0)dC_0+\beta U'(C_1)dC_1=0$

得出 $$\frac{dC_1}{dC_0}=-\frac{U'(C_0)}{\beta U'(C_1)} \qquad (1)$$

其中，U ：效用函數

C_0，C_1 ：消費

P_0，P_1 ：價格

i_0 ：t_0 至 t_1 期間儲蓄之名目利率

β ：折現率

- 預算限制式

$$p_1C_1=(W_0-p_0C_{0)})(1+i_0)$$

$$p_1dC_1=-p_0dC_0(1+i_0)$$

$$\frac{dC_1}{dC_0}=-\frac{1+i_0}{1+\pi_1} \qquad (2)$$

其中，W_0 ：期初財富

P_0，P_1 ：價格

π_1 ：通膨率

- 家計部門的效用極大化

由(1)與(2)式可得出(3)式：

$$U'(C_1) = \beta\left[U'(C_1)\frac{1+i_0}{1+\pi_1}\right] \quad (3)$$

- 家計部門無限期、具不確定性之隨機情況下的一般解

$$\boxed{U'(C_t) = \beta E_t\left[U'(C_{t+1})\frac{1+i_t}{1+\pi_{t+1}}\right]} \quad (4)$$

上式為動態 IS 曲線，亦即消費 Euler 方程式。

其意涵為：

$i_t\uparrow \;\Rightarrow U'(C_t)\uparrow \;\Rightarrow C_t\downarrow$ （利率上升，降低消費）

$E_t\pi_{t+1}\uparrow \Rightarrow U'(C_t)\downarrow \Rightarrow C_t\uparrow$ （預期未來通膨上升，增加消費）

(2) 廠商部門

廠商部門的特性為在名目價格僵固性(nominal price rigidity)下，追求利潤極大化。亦即在需求曲線、名目價格僵固性及勞動供給曲線限制下，追求「自目前至無限的未來」的預期利潤折現值的極大化。

以下說明新凱因斯或前瞻性菲力浦曲線之推導過程：[4]

參考 Calvo(1983)的名目價格僵固性模型：假設在 t 期，部份廠商無法調整其價格。

$1-\omega$：每 1 期可改變其訂價之廠商家數比率(價格設定者比率)

ω：每 1 期不能改變其訂價之廠商家數比率(非價格設定者比率)

[4]參考 Walsh(2003)第 5 章與本報告第 2 節說明。

- 總物價水準（$\hat{p}_t$）

$$\boxed{\hat{p}_t = (1-\omega)\hat{p}_{it} + \omega\hat{p}_{t-1}} \qquad (5)$$

其中，$\hat{p}_t$　　：總物價水準

$(1-\omega)\hat{p}_{it}$　：價格設定者部份

$\omega\hat{p}_{t-1}$　　：非價格設定者部份（$\hat{p}_{t-1}$為前 1 期總物價）

- **t 期最適價格設定（$\hat{p}_{it}$）**

$$\boxed{\hat{p}_{it} = (1-\beta\omega)p_t^* + \beta\omega E_t\hat{p}_{it+1}} \qquad (6)$$

其中，$\hat{p}_{it}$：t 期設定的價格

p_t^*：在彈性價格均衡下的價格

$E_t\hat{p}_{it+1}$：t+1 期「渴望的」(desired)價格

➢ 若 $\omega = 0$，為完全物價彈性，則 $\hat{p}_{it} = p_t^*$

➢ 若 $\omega = 1$，為物價無彈性，則 $\hat{p}_{it} \to E_t\hat{p}_{it+1}$

- 在彈性價格均衡下的價格（p_t^*）

p_t^*為邊際成本（mc_t）的固定加成。

$$\boxed{\hat{p}_t^* = \hat{p}_t + \hat{m}c_t} \qquad (7)$$

- 邊際成本（mc_t）

假設模型中未包括資本，所有邊際成本皆歸因為工資。

假設工資（$\hat{w}_t$）和邊際成本（$\hat{m}c_t$）間為線性關係：

$$\boxed{\hat{m}c_t = \hat{w}_t} \qquad (8)$$

- 工資（$\hat{w}_t$）

勞動供給函數之假設為，當產出高於趨勢值時(出現正的產出缺口)，工資上升。

$$\boxed{\hat{w}_t = \frac{1}{\alpha}\hat{x}_t} \qquad (9)$$

$\frac{1}{\alpha}$：為工資相對於產出缺口($\hat{x}_t$)的彈性

- 新凱因斯(或前瞻性)菲力浦曲線

由(5)至(9)式，漸次推導出新凱因斯或前瞻性菲力浦曲線(forward-looking Phillips curve)：

$$\boxed{\hat{x}_t = \frac{\alpha\omega}{(1-\omega)(1-\beta w)}(\hat{\pi}_t - \beta E_t\hat{\pi}_{t+1})} \qquad (10)$$

其意涵為：

若 $(\hat{\pi}_t - \beta E_t\hat{\pi}_{t+1}) < 0 \quad \Longrightarrow \quad \hat{x}_t < 0$

(預期未來的通膨上揚，廠商將目前訂價調高，抑制供給)

(3) 貨幣當局

假設貨幣當局依循下述簡單法則來設定利率：

利率(i_t)視通膨情勢$(\hat{\pi}_t)$而調整，並允許衝擊項(v_t)存在。

$$\boxed{i_t = \delta\hat{\pi}_t + v_t} \qquad (11)$$

(4) 基準 DSGE 模型

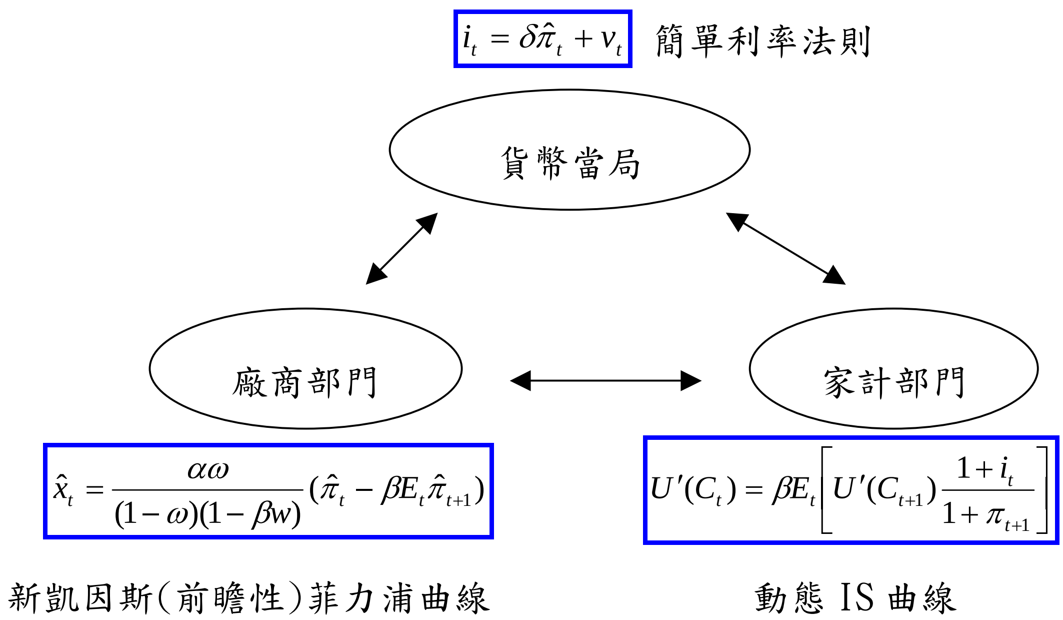
基準 DSGE 模型即係由(4)、(10)與(11)式組合而成，包括下列 3 個主要方程式：

- 家計部門—動態 IS 曲線 $\boxed{U'(C_t)=\beta E_t\left[U'(C_{t+1})\dfrac{1+i_t}{1+\pi_{t+1}}\right]}$

- 廠商部門—新凱因斯(前瞻性)菲力浦曲線

$$\boxed{\hat{x}_t=\frac{\alpha\omega}{(1-\omega)(1-\beta w)}(\hat{\pi}_t-\beta E_t\hat{\pi}_{t+1})}$$

- 貨幣當局：簡單利率法則 $\boxed{i_t=\delta\hat{\pi}_t+v_t}$



3.2 DSGE 模型之實務處理方法

本節探討如何將理論 DSGE 模型，化簡為實務上較易於處理之「對數線性化」DSGE 模型。

(1) 家計部門

採取下述兩個簡化假設：

- CRRA效用函數(<u>c</u>onstant <u>r</u>elative <u>r</u>isk <u>u</u>tility)

  $$U(C_t) = \frac{C_t^{1-\sigma}}{1-\sigma}$$

  其特性為當 $\sigma = 1$ 時，其極限趨近於對數函數：($\lim_{\sigma \to 1} \frac{C_t^{1-\sigma}}{1-\sigma} = \ln C_t$)

  $$U'(C_t) = C_t^{-\sigma} \qquad (12)$$

- 無資本， $C_t = Y_t$ (13)

- **動態 IS 曲線**

  由(4)、(12)與(13)式得出下式：

  $$Y_t^{-\sigma} = \beta E_t \left[Y_{t+1}^{-\sigma} \right] \frac{1+i_t}{1+\pi_{t+1}} \qquad (14)$$

<u>對數線性化</u>

上述動態 IS 曲線為非線性關係，實務上可採對數線性化(log-linearization)方法來加以簡化為下式，俾利於求解。將(14)式取對數：

$$-\sigma \ln Y_t = \ln \beta + \ln E_t \left[Y_{t+1}^{-\sigma} \frac{1+i_t}{1+\pi_{t+1}} \right] \qquad (15)$$

(15)式中的 $E_t \left[Y_{t+1}^{-\sigma} \frac{1+i_t}{1+\pi_{t+1}} \right]$ 求解，須仰賴「泰勒數列展開式」。

泰勒數列展開式

基於對數函數之 Taylor 數列展開型式之一階(線性)型式：

$$\ln E_t(1+s) \approx E(s) \approx E\ln(1+s)$$

則(15)式中之 $E_t\left[Y_{t+1}^{-\sigma}\frac{1+i_t}{1+\pi_{t+1}}\right] \approx E_t \ln\left[Y_{t+1}^{-\sigma}\frac{1+i_t}{1+\pi_{t+1}}\right]$

因此，非線性之動態 IS 曲線之對數線性展開式為

$$-\sigma\ln Y_t = \ln\beta - \sigma E_t \ln Y_{t+1} + \ln(1+i_t) - E_t \ln(1+\pi_{t+1}) \qquad (16)$$

均衡狀態值(steady-state value)

$$-\sigma\ln\bar{Y} = \ln\beta - \sigma\ln\bar{Y} + \ln(1+\bar{i}\ ) - \ln\bar{\pi} \qquad (17)$$

由(16)減(17)，得出下式：

$$-\sigma(\ln Y_t - \ln\bar{Y}) = -\sigma E_t(\ln Y_{t+1} - \ln\bar{Y}) + \ln(1+i_t) - \ln(1+\bar{i}\ ) + E_t\ln(1+\pi_{t+1}) - \ln\bar{\pi}$$

(18)

偏離均衡狀態

$$\ln Y_t - \ln\bar{Y} = \ln\frac{Y_t}{\bar{Y}} \approx \frac{Y_t}{\bar{Y}} - 1 = \frac{Y_t - \bar{Y}}{\bar{Y}} = \hat{x}_t \qquad (19)$$

$\frac{Y_t - \bar{Y}}{\bar{Y}}$：產出($Y_t$)偏離其均衡狀態值($\bar{Y}$)之百分比

$\ln Y_t - \ln\bar{Y}$：產出缺口，另以($\hat{x}_t$)表之。

- **對數線性化之 IS 曲線**

由(18)、(19)式得出下式：

$$\boxed{\hat{x}_t = E_t\hat{x}_{t+1} - \sigma^{-1}(\hat{i}_t - E_t\hat{\pi}_{t+1})} \qquad (20)$$

(2) **廠商部門**

為方便說明，在前面 3.1.2 節中所探討的廠商部門各變數係已經過對數線性化處理。原(10)式即為已經對數線性化處理的新凱因斯(前瞻性)菲力浦曲線。相關原始方程式可詳見 Walsh(2003)第 5 章說明，比較有關原始方程式與對數線性化處理的結果(參見附表 1)。

(3) **貨幣當局**

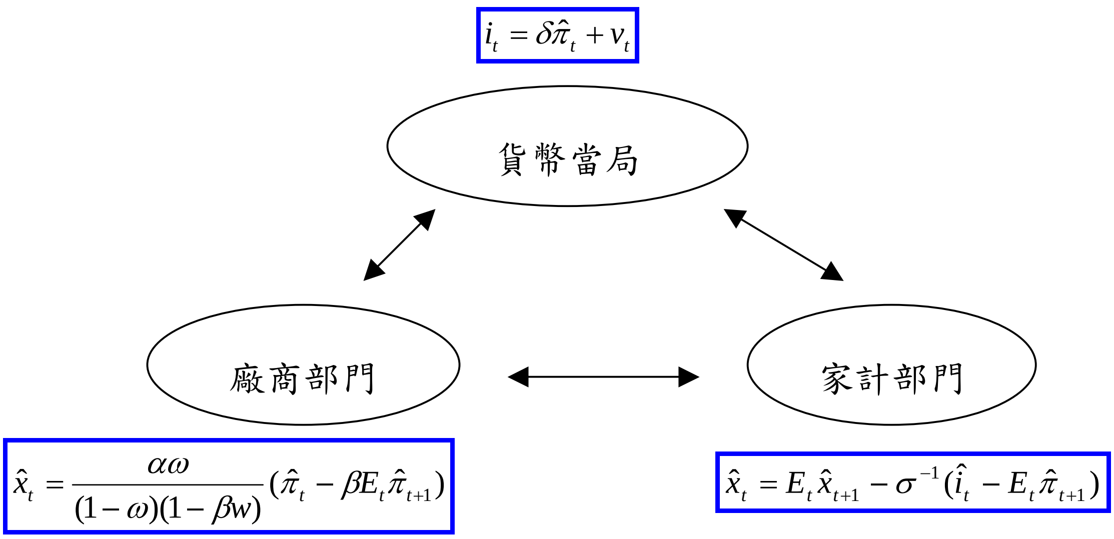
由(11)式之簡單法則係假設：$\hat{i}_t = \delta\hat{\pi}_t + v_t$　　　　(21)

其等於 $\ln i_t - \ln\bar{i} = \delta(\ln\pi_t - \ln\bar{\pi}) + v_t$

在 i_t 值為小的情況下，非常近似於線性法則。

(4) **對數線性化 DSGE 模型**

綜合(10)、(20)、(21)式即為經對數線性化處理的 DSGE 模型。



- **均衡狀態(steady state)**

以原始方程式來計算均衡狀態值：

➢ 假設貨幣當局：　$\bar{i} = \frac{1-\beta}{\beta} \approx 0$

➢ 由家計部門：$\bar{Y}^{-\sigma}=\beta\bar{Y}^{-\sigma}\left[\frac{1+\bar{i}}{1+\bar{\pi}}\right]$，$\bar{\pi}=0$

➢ 由廠商部門：$\bar{P}=\bar{P}_i=\bar{P}^*$

$$\overline{mc}=\overline{\left(\frac{W}{P}\right)}=\frac{\theta-1}{\theta}$$

$$\bar{Y}=\left(\frac{\theta-1}{x\theta}\right)^{\frac{1}{\eta+\sigma}}$$

(5) 完全的 DSGE 模型

$$\boxed{\begin{aligned}&\hat{x}_t=E_t\hat{x}_{t+1}-\sigma^{-1}(\hat{i}_t-E_t\hat{\pi}_{t+1})\\&\hat{\pi}_t=\beta E_t\hat{\pi}_{t+1}+\kappa\hat{x}_t\\&\hat{i}_t=\delta\hat{\pi}_t+v_t\\&\kappa=\frac{(1-\omega)(1-\beta\omega)}{\alpha\omega}\end{aligned}} \tag{22}$$

(22)式另亦可表為(23)式：

$$\boxed{\begin{aligned}&\hat{x}_t=E_t\hat{x}_{t+1}+\sigma^{-1}E_t\hat{\pi}_{t+1}=\hat{x}_t+\sigma^{-1}\delta\hat{\pi}_t+\sigma^{-1}v_t\\&\beta E_t\hat{\pi}_{t+1}=-\kappa\hat{x}_t+\hat{\pi}\end{aligned}} \tag{23}$$

(23)式可表為狀態空間(state space)型式如(24)式，俾於求解（參考下節說明）。

$$\boxed{\begin{bmatrix}1&\sigma^{-1}\\0&\beta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}E_t\hat{x}_{t+1}\\E_t\hat{\pi}_{t+1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&\sigma^{-1}\delta\\-\kappa&1\end{bmatrix}\begin{pmatrix}\hat{x}_t\\\hat{\pi}_t\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\sigma^{-1}\\0\end{pmatrix}v_t} \tag{24}$$

3.3 DSGE 模型的求解方法

3.3.1 一般化狀態空間模型的求解技巧

求解步驟說明如下：

- **首先將方程式表為狀態空間(state space)型式**

$$\mathrm{A}_0 E_t X_{t+1} = A_1 X_t + B_0 v_{t+1} \qquad (25)$$

(25)式為一般化的狀態空間(state space)型式

若設定 $\mathrm{A} \equiv \mathrm{A}_0^{-1} A_1$

$B \equiv A_0^{-1} B_0$

可(25)式可另表為下列的狀態空間型式：

$$\boxed{E_t X_{t+1} = A\ X_t + B v_{t+1}} \qquad (26)$$

- **模型分割(partition of model)**

將模型中的變數（X_t）劃分為下列兩類：

$$\mathrm{X}_t = \begin{bmatrix} w_t \\ y_t \end{bmatrix} \qquad (27)$$

- w_t：回顧(backward-looking)或先決(predetermined)變數
  包括外生變數和落後變數（lagged variable)）
- y_t：前瞻(forward-looking)或控制(control)變數

由(26)、(27)式可得出(28)式

$$\begin{bmatrix} w_{t+1} \\ E_t y_{t+1} \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} w_t \\ y_t \end{bmatrix} + B v_{t+1} \qquad (28)$$

- **A 矩陣之 Jordan 分解(Jordan decomposition)**

可將(28)式中之係數 A 矩陣分解如下：

$\boxed{A = P\Lambda P^{-1}}$ (29)

P ：特徵向量(eigenvectors)

Λ ：特徵根對角矩陣(diagonal matrix of eigenvalues)

Blanchard-Kahn條件（Blanchard-Kahncondition）

有許多技巧可求解上述狀態空間型式的模型(例如一般化的理性預期模型)，其中「Blanchard-Kahn 條件」為常被使用的方法(詳見後面說明)。

Blanchard-Kahn 條件：當「不穩定的特徵向量數目等於前瞻(或控制)變數的數目」時，亦即「特徵根對角矩陣(Λ)中的特徵根絕對值大於 1 的數目，必須等於前瞻(或控制)變數的數目」則理性預期模型具有**惟一**的的均衡解。。

- 太多穩定的特徵根，導致多重均衡解
- 太多不穩定的特徵根，導致無解

- **Jordan 型式的重新排列**

由(28)與(29)式可得出下式：

$\begin{bmatrix} w_{t+1} \\ E_t y_{t+1} \end{bmatrix} = P\Lambda P^{-1} \begin{bmatrix} w_t \\ y_t \end{bmatrix} + Bv_{t+1}$， 將左、右各項皆乘以 P^{-1}，

$P^{-1}\begin{bmatrix} w_{t+1} \\ E_t y_{t+1} \end{bmatrix} = \Lambda P^{-1} \begin{bmatrix} w_t \\ y_t \end{bmatrix} + P^{-1}Bv_{t+1}$，設定 $R \equiv P^{-1}B$，得出下式：

$$p^{-1}\begin{bmatrix} w_{t+1} \\ E_t y_{t+1} \end{bmatrix} = \Lambda P^{-1} \begin{bmatrix} w_t \\ y_t \end{bmatrix} + Rv_{t+1} \quad (30)$$

將(30)式中之Λ、P^{-1}、R 分別分割為穩定與不穩定之部份：

穩定

$$\Lambda=\begin{bmatrix}\Lambda_1 & 0\\ 0 & \Lambda 2\end{bmatrix}\qquad P^{-1}=\begin{bmatrix}P_{11}^{*} & P_{12}^{*}\\ P_{21}^{*} & P_{22}^{*}\end{bmatrix}\qquad R=\begin{bmatrix}R_1\\ R_2\end{bmatrix}\qquad(31)$$

不穩定

將(31)中各項分別帶入(30)式可得出下式：

$$\begin{bmatrix}P_{11}^{*} & P_{12}^{*}\\ P_{21}^{*} & P_{22}^{*}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}w_{t+1}\\ E_t y_{t+1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\Lambda_1 & 0\\ 0 & \Lambda_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}P_{11}^{*} & P_{12}^{*}\\ P_{21}^{*} & P_{22}^{*}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}w_t\\ y_t\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}R_1\\ R_2\end{bmatrix}v_{t+1}\qquad(32)$$

- **轉換模型**

展開(32)式，且設定 $\boxed{\begin{matrix}\tilde{w}_t\equiv P_{11}^{*}w_t+P_{12}^{*}y_t\\ \tilde{y}_t\equiv P_{21}^{*}w_t+P_{22}^{*}y_t\end{matrix}}$，則得出轉換模型如下：

$$\begin{bmatrix}\tilde{w}_{t+1}\\ E_t\tilde{y}_{t+1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\Lambda_1 & 0\\ 0 & \Lambda_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\tilde{w}_t\\ \tilde{y}_t\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}R_1\\ R_2\end{bmatrix}v_{t+1}\qquad(33)$$

- **分離方程式**

展開(33)式後，分離出「穩定」與「不穩定」兩大部份之方程式：

- ➢ $\tilde{w}_{t+1}=\Lambda_1\,\tilde{w}_t+R_1\,v_{t+1}$ （$\tilde{w}$ 為轉換後之穩定方程式） (34)
- ➢ $E_t\tilde{y}_{t+1}=\Lambda_2\,\tilde{y}_t+R_2\,v_{t+1}$ （$\tilde{y}$ 為轉換後之不穩定方程式） (35)

- **求解策略**

上述經轉換後之穩定方程式（$\tilde{w}$）、不穩定方程式（$\tilde{y}$）先經分別求解後，再換算成原方程式解 $\begin{bmatrix}w_t\\ y_t\end{bmatrix}$。

(1) **不穩定方程式之解**

$$E_t\tilde{y}_{t+j}=(\Lambda_2)^j\tilde{y}_t$$

由於$|\Lambda_2|>1$，故唯一的穩定解為 $\tilde{y}_t=0 \quad ,\forall t$

由 $\tilde{y}_t=p_{21}^{*}w_t+P_{22}^{*}y_t=0$

得出 $\boxed{y_t=-p_{21}^{*\,-1}P_{21}^{*}w_t}$ (36)

可將前瞻或控制變數(y_t)化為回顧或先決變數(w_t)的函數。

(2) **穩定方程式之解**

$$E_t\tilde{w}_{t+j}=(\Lambda_1)^j\tilde{w}_t$$

由於$|\Lambda_1|<1$

$$\tilde{w}_t\equiv P_{11}^{*}w_t+P_{12}^{*}y_t \tag{37}$$

將(36)式之(y_t)代入(37)式，得出下式：

$$\boxed{\tilde{w}_t=(P_{11}^{*}-P_{12}^{*}P_{22}^{*\,-1}P_{21}^{*})w_t} \tag{38}$$

$$\boxed{\tilde{w}_{t+1}=(P_{11}^{*}-P_{12}^{*}P_{22}^{*\,-1}P_{21}^{*})w_{t+1}} \tag{39}$$

將(38)、(39)式代入(34)式，得出下式：

$$\boxed{w_{t+1}=(P_{11}^{*}-P_{12}^{*}P_{22}^{*\,-1}P_{21}^{*})^{-1}\Lambda_1(P_{11}^{*}-P_{12}^{*}P_{22}^{*\,-1}P_{21}^{*})w_t+(P_{11}^{*}-P_{12}^{*}P_{22}^{*\,-1}P_{21}^{*})^{-1}R_1v_{t+1}} \tag{40}$$

上式將**未來的「回顧或先決變數(w_{t+1})」化為當期的「回顧或先決變數(w_t)」的函數。**

(3) **模型之解**

(36)與(40)即為模型之解，亦即所有變數最終皆可化為「回顧或先決變數(w_t)」的函數。

3.3.2 基準 DSGE 模型之求解與模擬

基準 DSGE 模型之狀態空間型式可表為前面 3.2 節討論之(24)式：

$$\begin{bmatrix} 1 & \sigma^{-1} \\ 0 & \beta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} E_t\hat{x}_{t+1} \\ E_t\hat{\pi}_{t+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \sigma^{-1}\delta \\ -\kappa & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \hat{x}_t \\ \hat{\pi}_t \end{bmatrix} + \begin{pmatrix} \sigma^{-1} \\ 0 \end{pmatrix} v_t$$

若假設政策衝擊項(v_t)係依循 AR(1)過程，亦即 $\boxed{v_{t+1} = \rho v_t + \varepsilon_{t+1}}$

則上述 DSGE 模型可另表如下：

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \sigma^{-1} \\ 0 & 0 & \beta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_{t+1} \\ E_t\hat{x}_{t+1} \\ E_t\hat{\pi}_{t+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho & 0 & 0 \\ \sigma^{-1} & 1 & \sigma^{-1}\delta \\ 0 & -\kappa & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_t \\ \hat{x}_t \\ \hat{\pi}_t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\varepsilon_{t+1}$$

如前所述，DSGE 模型求解步驟須先將模型中的變數劃分為「前瞻(y_t)」與「回顧 (w_t)」兩類變數。此 DSGE 模型有 1 個回顧變數為 v_t ，有 2 個前瞻變數為 $\hat{x}_t$, $\hat{\pi}_t$ 。亦即

$$w_t = v_t$$

$$y_t = \begin{bmatrix} \hat{x}_t \\ \hat{\pi}_t \end{bmatrix}$$

根據 Blanchard-Khan 條件須有 1 個穩定的特徵根、2 個不穩定的特徵根，模型才有惟一均衡解。

<u>實務上作法</u>：

- <u>求解</u>：可參考相關實證文獻的實證結果，設定(calibrate)係數矩陣中的各參數(例如，σ、β、κ、η)數值。[5]再依照 3.3.1

[5]目前 DSGE 模型逐漸重視參數的估計。DSGE 模型的估計方法通常包括一般化動差法(generalized method of moments, GMM)、一般化工具變數法(generalized instrumental variables, GIV)，加權矩陣的選擇(Choice of weighting matrix)、建立估計值的標準誤，以及檢定限制條件等（參見 Canova(2007)）。

節所述求解步驟進行，求解出(36)與(40)式。

- 模擬：求解後，可進而模擬通膨率、產出缺口與利率等數列。

(1) 先模擬出 ε_t 隨機數列值，根據 $\boxed{v_{t+1} = \rho v_t + \varepsilon_{t+1}}$ 進而得出利率衝擊 v_t 數列。

(2) 再依(40)與(36)式，分別模擬出通膨率與產出缺口數列。再依利率法則 $\boxed{\hat{i}_t = \delta\hat{\pi} + v_t}$，得出利率數列。

(3) 可針對這些模擬的通膨率、產出缺口與利率等數列分析其相互間關係(cross-correlation)、自身相關(autocorrelation)等性質。

(4) 亦可模擬衝擊反應函數 (impulse response function)，以瞭解 (ε_t) 衝擊對各變數之影響。

3.4 較為複雜的 DSGE 模型

(1) 多個衝擊項(Multi-shock)

前述簡單的基準 DSGE 模型中，只有在貨幣當局的貨幣政策法則中納入利率衝擊項 v_t (參見(22)式)。另亦可於動態 IS 曲線與前瞻菲力浦曲線方程式中分別加入額外的衝擊項 g_t 與 u_t ，如下所示：

$$\boxed{\begin{aligned}&\hat{x}_t = E_t\hat{x}_{t+1} - \sigma^{-1}(\hat{i}_t - E_t\hat{\pi}_{t+1}) + g_t\\&\hat{\pi}_t = \beta E_t\hat{\pi}_{t+1} + \kappa\hat{x}_t + u_t\\&\hat{i}_t = \delta\hat{\pi}_t + v_t\\&\\&\kappa = \frac{(1-\omega)(1-\beta\omega)}{\alpha\omega}\end{aligned}} \qquad (41)$$

- **可假設 3 種衝擊項為彼此獨立的 AR(1)過程**

$$\begin{bmatrix} g_{t+1} \\ u_{t+1} \\ v_{t+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho_g & 0 & 0 \\ 0 & \rho_u & 0 \\ 0 & 0 & \rho_v \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_t \\ u_t \\ v_t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_{t+1}^{g} \\ \varepsilon_{t+1}^{u} \\ \varepsilon_{t+1}^{v} \end{bmatrix}$$

g_t ：總需求衝擊(aggregate demand or IS shock)
u_t ：成本推動衝擊(cost-push shock)
v_t ：利率衝擊(interest rate shock)

ρ_g 、ρ_u 、ρ_v 分別代表 g_t 、u_t 與 v_t 衝擊的持續性(persistence)

ε_{t+1}^{g} 、ε_{t+1}^{u} 與 ε_{t+1}^{v} 分別為 g_t 、u_t 與 v_t 的隨機干擾項(innovation)

此 DSGE 模型有 3 個回顧變數(g_t 、u_t 與 v_t)，有 2 個前瞻變數($\hat{x}_t$,$\hat{\pi}_t$)。根據 Blanchard-Khan 條件，須有 3 個穩定的特徵根、2 個不穩定的特徵根，模型才有惟一均衡解。

- **另亦可假設 3 種衝擊項為相關的 AR(1)過程**

模型中不同方程式的衝擊項 g_t 、u_t 與 v_t 彼此間亦可以有交互關係的，如下所示：

$$\begin{bmatrix} g_{t+1} \\ u_{t+1} \\ v_{t+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho_{11} & \rho_{12} & \rho_{13} \\ \rho_{21} & \rho_{21} & \rho_{21} \\ \rho_{31} & \rho_{31} & \rho_{31} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_t \\ u_t \\ v_t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \tau_{21} & \tau_{21} & \tau_{21} \\ \tau_{31} & \tau_{31} & \tau_{31} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{t}^{g} \\ \varepsilon_{t}^{u} \\ \varepsilon_{t}^{v} \end{bmatrix}$$

(2) 持續性(persistence)

可於原基準 DSGE 模型中的動態 IS 曲線與菲力浦曲線方程式中加入額外的落後期數(lagged terms)，以補捉更多的資料動態性質。

$$
\begin{aligned}
&\hat{x}_t = \frac{h}{1+h}\hat{x}_{t-1} + \frac{1}{1+h}E_t\hat{x}_{t+1} - \sigma^{-1}(\hat{i}_t - E_t\hat{\pi}_{t+1}) \\
&\hat{\pi}_t = \frac{\gamma_p}{1+\beta\gamma_p}\hat{\pi}_{t-1} + \frac{\beta}{1+\beta\gamma_p}E_t\hat{\pi}_{t+1} + \kappa\hat{x}_t \\
&\hat{i}_t = \delta\hat{\pi}_t + v_t \\
&\kappa = \frac{(1-\omega)(1-\beta\omega)}{\alpha\omega}
\end{aligned}
$$

$\frac{h}{1+h}$：IS 曲線中落後期產出缺口的係數

$\frac{1}{1+h}$：IS 曲線中預期未來產出缺口的係數

$\frac{\gamma_p}{1+\beta\gamma_p}$：菲力浦曲線中落後期通膨率的係數

$\frac{\beta}{1+\beta\gamma_p}$：菲力浦曲線中預期未來通膨率的係數

(3)最適化泰勒法則

可將(41)式中的簡單利率法則改為泰勒法則，如下所式：

$$
\begin{aligned}
&\hat{x}_t = E_t\hat{x}_{t+1} - \sigma^{-1}(\hat{i}_t - E_t\hat{\pi}_{t+1}) + g_t \\
&\hat{\pi}_t = \beta E_t\hat{\pi}_{t+1} + \kappa\hat{x}_t + u_t \\
&i_t = \delta_\pi\hat{\pi}_t + \delta_x\hat{x} + v_t \\
&\kappa = \frac{(1-\omega)(1-\beta\omega)}{\alpha\omega}
\end{aligned}
$$

並假設總需求、成本推動與利率衝擊上述 3 種衝擊過程為獨立的 AR(1)過程：

$$
\begin{bmatrix} g_{t+1} \\ u_{t+1} \\ v_{t+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho_g & 0 & 0 \\ 0 & \rho_u & 0 \\ 0 & 0 & \rho_v \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_t \\ u_t \\ v_t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon^g_{t+1} \\ \varepsilon^u_{t+1} \\ \varepsilon^v_{t+1} \end{bmatrix}
$$

- 假設貨幣政策的目的在於使通膨率、產出缺口與利率變異的加權平均極小化，則合宜的目標函數或可表為下式：

$$\boxed{\min \sum_{i=0}^{\infty} \beta^i (\hat{\pi}_t^2 + \lambda_x \hat{x}_t^2 + \lambda_i \hat{i}_t^2)} \tag{42}$$

其中λ_x：產出缺口變異的權數

λ_i：利率變異的權數

<u>泰勒法則中產出缺口與通膨率的係數(δ_x、δ_π)之最佳值為何？</u>

例如，可採「格子盤搜尋」(grid

search) 方式進行，嘗試各種(δ_x、δ_π)可能數值的組合，針對其中符合 Blanchard-Kahn 條件的各種組合，進行模擬及根據(42)式計算模擬的目標函數值，亦即計算模擬的通膨率、產出缺口與利率變異的加權平均值 ($\sigma_{\hat{\pi}}^2 + \lambda_x \sigma_{\hat{x}}^2 + \lambda_i \sigma_{\hat{i}}^2$)。最後選出的(δ_x、δ_π)之最佳值為符合 Blanchard-Kahn 條件、且使(42)式之模擬目標函數值最低者之組合。

由於上述「格子盤搜尋」方法的速度非常緩慢，為增進運算速度，基於各種(δ_x、δ_π)可能數值組合的模型均衡解皆為線性，如下式 (此即為(36)與(40)式)：

$$\boxed{\begin{aligned} &y_t = -p_{21}^{*\ -1} P_{21}^* w_t \\ &w_{t+1} = (P_{11}^* - P_{12}^* P_{22}^{*\ -1} P_{21}^*)^{-1} \Lambda_1 (P_{11}^* - P_{12}^* P_{22}^{*\ -1} P_{21}^*) w_t + (P_{11}^* - P_{12}^* P_{22}^{*\ -1} P_{21}^*)^{-1} R_1 v \end{aligned}}$$

因此，可直接推導出回顧變數(w_t)與前瞻變數(y_t)之變異數

(Ω_x, Ω_y) 公式，毋須透過模擬過程。

4 其他心得與建議

(1) 本次課程參與學員共計 23 人，來自不同國家央行。各學員的語言與學術能力皆高於一般水準，值得我們學習效法之處甚多。

(2) 有關研習課程內容的檔案，已置放於本處公用處網內，俾供有興趣同仁學習參考之用。

(3) 除了瑞士央行基金會籌辦的研習課程外，亦可鼓勵本行同仁參與其他國家央行（例如英格蘭央行等）所舉辦的相關研習課程，俾增進專業知識。

參考文獻

Barnett Alina and Martin Ellison(2005), Practical DSGE Modelling, Bank of England, December 2005.

Blanchard, O. and Kahn(1980), "The Solution of Difference Equations Under Rational Expectations," Econometrica, 48, 1305-1311.

Canova (2007), Lecture Note.

Clarida Richard, Jordi Gali and Mark Gertler(1999), "The Science of Monetary Policy: A New Keynesian Perspective," Journal of Economic Literature, Vol. XXXVII, December 1999, pp.1661-1707.

Muller Gernot and Roland Straub(2007), DSGE Models: Theory and Applications.

Walsh, Carl. (2003), Monetary Theory and Policy, chapter 5.

附表 1

變數	原始方程式	對數線性化處理
總物價水準	$p_t^{1-\theta} = (1-\omega)\, p_{it}^{1-\theta} + \omega p_{t-1}^{1-\theta}$	$\hat{p}_t = (1-\omega)\,\hat{p}_{it} + \omega\hat{p}_{t-1}$
最適價格設定	$\dfrac{P_{it}}{P_t} = \dfrac{\theta}{1-\theta}\dfrac{E_t\sum_{i=0}^{\infty}\omega^i\beta^i C_{t+i}^{1-\sigma}\, p_{t+i}^{*}\left[\dfrac{P_{t+i}}{P_t}\right]^{\theta}}{E_t\sum_{i=0}^{\infty}\omega^i\beta^i C_{t+i}^{1-\sigma}\left[\dfrac{P_{t+i}}{P_t}\right]^{\theta-1}}$	$\hat{p}_{it} = (1-\beta\omega)\,\hat{p}_t^{*} + \beta\omega E_t\,\hat{p}_{it+1}$
在彈性價格均衡下的價格	$p_t^{*} = \left(\dfrac{\theta}{\theta-1}\right) p_t mc_t$	$\hat{p}_t^{*} = \hat{p}_t + \hat{m}c_t$
邊際成本	$\dfrac{W_t}{P_t} = mc_t$	$\hat{m}c_t = \hat{w}_t$
工資	$\dfrac{W_t}{P_t} = \dfrac{\chi N_t^{\eta}}{C_t^{-\sigma}}$； $C_t = N_t$	$\hat{w}_t = \dfrac{1}{\alpha}\hat{x}_t$

註：θ 為對廠商 i 產品之需求彈性、N 為工時、χ 為 N 之乘數、1+η 為 N 之指數項，其餘參見原文。