# 壹、前言

職等奉　派於 6 月 5 日至 6 月 30 日，參加高盛投資管理公司(GSAM)在倫敦及紐約所舉辦之研討會及訓練課程，本次研討會及訓練課程在倫敦及紐約舉行。在倫敦於 in house 研習中，除了解 GSAM 之組織架構、風險管理模式、決策流程及投資策略外，同時並參加 GSAM 每年一度之 Global Central Bank University 之研討會議，與會人士包括各國央行及退休基金之研究及交易人員。會議主題包含投資組合管理、外匯存底最適幣別組合管理及衍生性金融商品等專題，會末並舉辦投資模擬競賽，使與會者熟習投資決策之過程。

在紐約行程除參加美國高盛銀行為其員工及客戶舉辦之利率交換及選擇權課程外，在 GSAM in house 則著重於美國不動產抵押債券市場之研習。因所包括之主題甚廣，本報告僅就 GSAM 投資決策流程、外匯交易策略及 Black-Litterman 資產組合理論與衍生性金融商品課程中有關利率交換之專題等部分進行深入討論。

GSAM 之投資決策與帳戶經理人間之互動及溝通大部分建立於風險預算模型（risk budget model）中。在其風險預算模型中，因應各帳戶之預期獲利及可承擔之風險、投資限制及 benchmark 等訂定之 guideline 下訂定目標預期報酬及目標 tracking error，隨後將總可操作之資金交由策略團隊加以操作。在風險預算限制下，各投資團隊各自擬定操作策略，並進行投資決策，以求超額報酬極大，並在每週團體會議中加以討論。本報告以外匯操作策

略作為代表。

外匯操作策略主要可分為基本面分析及模型分析；在 GSAM 之模型中，基本面分析及模型分析各占風險預算(risk budget)模型之一半。基本面分析主要是以主觀判斷 (judgmental)為主，其主要針對之市場為主要貨幣及新興市場貨幣，以屬質與屬量之變數給定分數及重要程度並考量其相關性，得出具有評斷標準各幣別比較，並從中取得具吸引力之投資幣別。在此，每一個變數之權重並非固定。模型分析是以價值分析、動能、資金流量及總經政策等作為投入預測指標，其主要涉入之標的貨幣為 11 種主要貨幣，以平衡計分卡之方式，加上過去平均之固定給定投入權數，藉由 Black-Litterman 模型加以模型化並產生最適之投資組合。

Black-Litterman 改善 CAPM 模型中 neutral view，適時加入個別投資人之看法，進而在市場偏離均衡狀態下，獲取利潤。本主題最後介紹 Black-Litterman 模型，內容包含其推導過程及實例說明。

本次利率衍生性金融商品課程除介紹各種商品意義及特性外，透過實例演練分析，更深入瞭解實務上的運用。

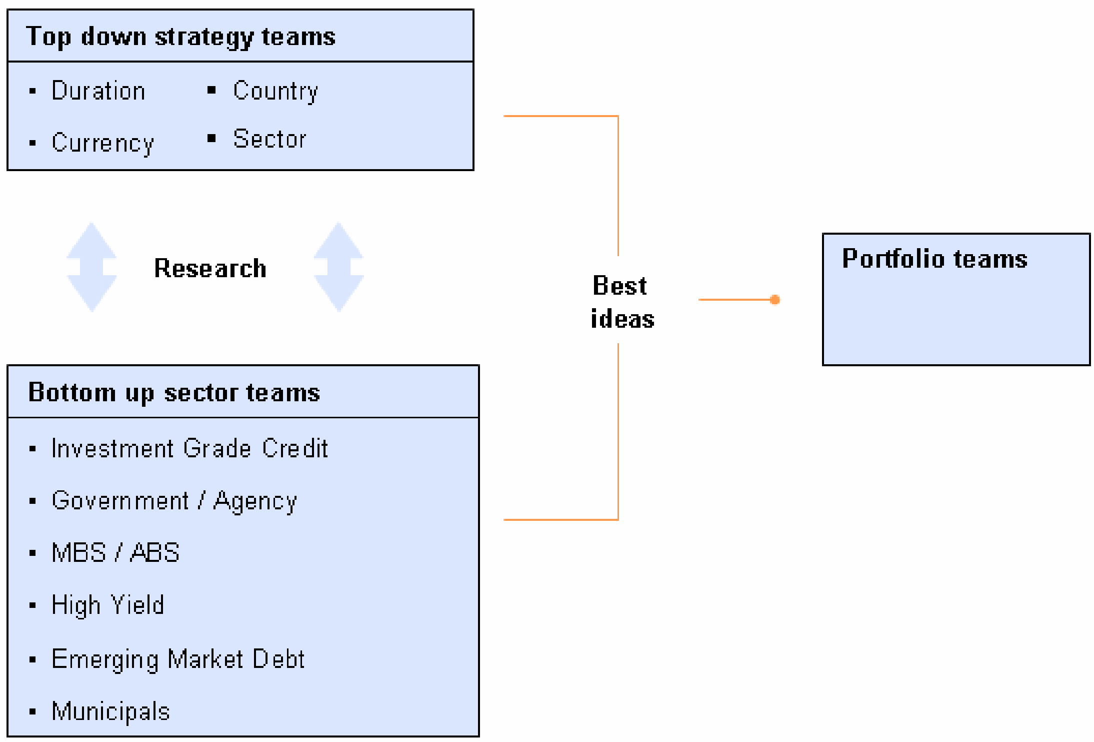
利率衍生性金融商品的價值是未來各期現金流量的折現合，是以其訂價的第一步幾乎都是建置一代表性之零息債券殖利率曲線，以求算未來各期現金流量的折現因子，進而算出各資產的淨現值。

而關於利率的衍生性商品中，利率交換(Interest Rate Swap；IRS)因具有藉交換固定與浮動利息以契合資產負債型態之性質，

及提供投資者降低利率風險之功能，其重要性對利率衍生性商品的發展有舉足輕重的地位，因此在此我們將針對利率交換之報價利率，利用市場上現有的資訊，估計出零息殖利率曲線。另針對利率交換特性、功能及訂價等作一簡單之介紹及訂價實例演練分析。

## 貳、GSAM 之決策操作模式

GSAM 之投資決策與帳戶經理人間之互動及溝通大部分建立於風險預算模型（risk budget model）中。在其風險預算模型中因應各帳戶之預期獲利及可承擔之風險、投資限制及 benchmark 等訂定之 guideline 下訂定目標預期報酬及目標 tracking error，隨後將總可操作之資金交由其由上而下（top down strategy teams）之策略團隊及由下而上之產業部門團隊（bottom up sector teams）加以操作。




由上而下之策略團隊包括存續期間（duration/yield curve）、國家（country）、貨幣（currency）及產業部門（sector）等 4 部門，各部門主要目標在於策略之選擇；由下而上之產業部門團隊則包含投資等級之信用產品（investment grade credit）、政府公債、機構債及不動產抵押債券、高收益債券、新興市場債券

等，主要著重於證券之選擇（security selection），尋找價格錯置(mis-priced)之投資機會。

風險預算模型為每一策略訂定一目標之 tracking error 、目標超額報酬及目標之 I/O（Information Ratio）值、估計策略間之相關係數及投資集合，並確認長期目標之風險預算，此預算即為投資之限制。各投資團隊在此限制下進行投資決策，以求超額報酬極大。同時並依照各帳戶之特性及 guideline，將部位分配至各帳戶中，此時基金經理人亦可瞭解其帳戶之獲利情況。

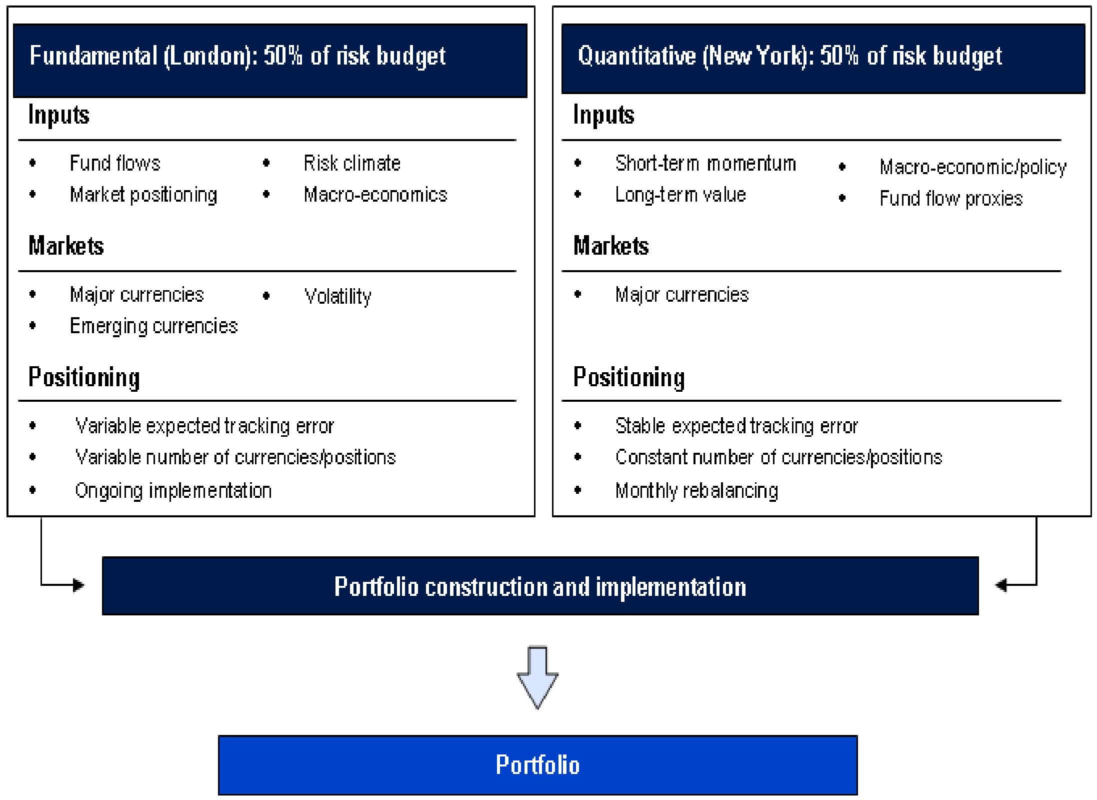
| Investment Strategy | Target tracking error (bps) | Target gross excess returns p.a. (bps) |
|---|---|---|
| **Interest rate management** | | **55** |
| Duration / Yield Curve | 100 | 15 |
| Country | 100 | 40 |
| **Sector & security management** | | **65** |
| Sector allocation | 90 | 25 |
| Security allocation: | | 40 |
| *Govt /Agency* | 5 | 5 |
| *MBS/ABS* | 5 | 5 |
| *Corporate* | 30 | 20 |
| *High Yield* | 10 | 5 |
| *EMD* | 10 | 5 |
| **Currency** | 80 | **30** |
| **Total target gross excess returns (bps)** | | **150** |
| Target tracking error (bps)? | | **200** |
| Information ratio | | **0.75** |

風險預算模型中之限制亦由獨立於投資部門外之內控部門（compliance）即時監控。公司在風險預算模型架構下，定期公布各部門之部位、投資工具及對於總獲利之表現。因此能即時明確評估各團隊之投資判斷及投資經理人之表現，並能控制風險。在

投資組合中，若能加入相關性較低之投資產品以分散風險，並妥適利用衍生性金融商品工具加以避險，將可有助經理人投資操作之彈性，進而提高預期報酬。

## 參、GSAM 之外匯交易策略

外匯操作策略主要可分為兩大部分，其一為基本面分析，其二為模型分析；其中基本面分析是由倫敦負責，模型分析之建構則由紐約負責。在 GSAM 之模型中，基本面分析及模型分析各占風險預算(risk budget)模型之一半。




## 一、基本面分析

基本面分析主要是以判斷性(judgmental)之指標，將其主要數據輸入有資金流量、風險環境、市場部位及總體經濟指標；在

長期指標方面，其主要觀測 OECD PPP、GSDEER、MS、MR monthy/yearly 等；在總體指標方面，是以財政赤字占 GDP 比重及貿易收支占 GDP 比重為主。同時亦參考長短期利差(spread)變化、股市表現、季節性波動、風險指標及商品價格等。其主要針對之市場為主要貨幣及新興市場貨幣，利用以上屬質與屬量之變數給定分數後加上屬量之評量後並考量其相關性矩陣（covariance matrix)，衡量各幣別間之相關性後，加以排序，得出一具有評斷標準之各幣別比較，並從中取得具吸引力之投資幣別。值得注意的是，在此，每一個變數其重要性之權重並非固定，評判之標準來自主觀為多。

## 二、計量模型分析

模型分析是以價值分析（valuation)、動能（momentum)、資金流量（fund flows）及總經政策（macro policy）等作為投入預測指標。價值分析以長期為主，以購買力衡量何種貨幣相對低估；動能主要在衡量何種貨幣短期內較為強勢；資金流量主要研究較具資產市場青睞之貨幣；總經政策則是評估較具吸引力之利率環境之貨幣。其主要之標的貨幣為 11 種主要貨幣（major currencies)，以平衡計分卡之方式，加上過去平均之固定給定投入權數，運用以上指標所產生 GSAM 對未來之預測，形成本身獨特之投資觀點，並藉由 Black-Litterman 模型加以模型化並產生最適之投資組合及區域權重分配。

在貨幣投資策略上，價值分析（valuation）以購買力評價（purchasing power parity）矩陣為代表、動能（momentum）則

以價格之動能為主、資金流量（fund flows）是以衡量各種或比需求之指標為主及總經政策（macro policy）則包含經濟成長及殖利率曲線等。

### 三、外匯操作策略

基本面分析之優點為各因素之權重並無固定而較有彈性，然預期之變動誤差（tracking error）較大；模型分析則是在各因素之權重固定下且為依據過去歷史經驗估計而得，因此，可靠度較佳。GSAM 之交易策略融合基本面分析及計量模型分析，含括屬質及屬量之研究、短期及長期之觀點。在交易策略中可自行採用各比例混和之基本面及計量策略，GSAM 本身是採取採 50％基本面策略及 50％計量策略之混和策略。

根據 GSAM 統計，採取單純之基本面分析策略時，波動性為 40％，採取單純之模型計量策略時，波動性為 40％；若採 50％基本面策略及 50％模型計量策略之混和策略，波動性則降為 32.5％；同時歷史資料顯示兩種策略間相關性並不高，因此，採取基本面分析及模型計量策略之混和策略將可降低投資組合之波動程度。因 GSAM 交易策略中計量模型占其交易策略之 50％，而計量模型中，主要是依據 Black-Litterman 之模型架構，因此以下將介紹 Black-Litterman 模型之由來及其應用。

## 肆、Black-Litterman 模型

本章將介紹 Black-Litterman 模型。Black-Litterman 改善 CAPM 模型中 neutral view，適時加入投資人（在此為資產管理公

司）之看法，進而在市場偏離均衡狀態下，獲取超額利潤。其基本信念有三：(1）將投資組合拓展分散至 11 種貨幣將有助於經理人操作上之便利。(2）國際證券市場具可預測性。(3）模型具有透明性及建構在經濟理論上。首先，簡述 CAPM 之背景，進而介紹 Black-Litterman 模型之推導過程，最後介紹 Black-Litterman 模型之實例。

**一、CAPM 之背景**

Markowitz（1952）投資組合理論提出了預期報酬率-變異數法則，透過均異最適化（mean-variance optimization）過程找出投資組合之最適權重，作為決定最適投資組合的依據，其認為當投資組合中的資產數目增加時，可以降低該投資組合之非系統風險。Treynor(1961)，Sharpe(1964)，Lintner(1965)，Mossin (1966)等學者於 1960 年代，發展建構推導出資本資產定價模型（capital asset pricing model，CAPM），闡述了風險與報酬間之關係。

資本資產定價理論闡述風險與報酬為抵換關係，即要達到預期的報酬，必須接受相對的風險。投資人的目標為在既定投資風險下，追求預期報酬最大化；或者在既定預期報酬下，追求風險（報酬的變異）最小。資本資產定價模型認為當市場達成均衡時，個別證券的預期報酬率可由無風險利率加上風險溢酬來決定。

CAPM 模型的主要假設，主要假設簡要列示如下：

1. 完全市場主要假設

（1）無風險利率借貸的情形存在且公平的。

（2）市場完全競爭:每位投資者都假設自己無法影響證券價格。

（3）證券公開交易且具有無限分割性。

（4）證券資訊取得沒有成本和延遲性。

（5）沒有市場扭曲--交易成本及稅負不存在。

2. 同質投資者主要假設

（1）投資人皆有理性的投資態度。

（2）投資人皆以標準差和預期報酬率來衡量相同單一持有期間的投資績效。

（3）投資人對所有證券的風險與報酬具有相同的認知。

（4）短視。

（5）常態或平均偏差的效用。

（6）預期同質性。

**二、CAPM 之主要精神**

CAPM 主要精神在說明當證券市場達成均衡時，在一個以有效資產分散與投資效率的投資組合中，個別資本資產的預期報酬率與所承擔證券市場風險（系統性風險）之間的線性關係，市場風險係數是用 $\beta$ 值來衡量。其關係式如下：

$$E(r_i)=r_f+\beta_i \times E(r_m-r_f)$$

$$[E(r_i)-r_f]=\beta_i \times E(R_m)$$

$$E(R_i)=\beta_i \times E(R_m)$$

其中，$E(r_i)$ 表示第 i 個證券的預期報酬率

$r_f$ 表示無風險利率

$r_m$ 表示市場的報酬率

$E(R_i)= E(r_i)-r_f$ 表示預期超額報酬

$E(R_m)= E(r_m)-r_f$ 表示預期市場超額報酬

$\beta_i$ 表示第 i 個證券與市場收益之共變數除以市場報酬之變異數，亦即 i 個證券的系統風險指標

$$\beta_i = \frac{\mathrm{cov}(r_M, r_i)}{\mathrm{var}(r_M)}$$

1、對市場風險曝露1單位的投資組合來說，其超額報酬為

$$E(r_M) - r_f \tag{1}$$

2、對市場的曝露的 $\beta$ 個單位來說，其超額報酬為：

$$\beta_i \cdot ( E(r_M) - r_f ) \tag{2}$$

個別證券原先應存在非系統風險與系統風險，若投資人進行的是單一證券的投資，基於高風險高報酬的原則下，該證券除了要補償投資人的機會成本（無風險報酬），亦須為本身額外的風險提供合理的預期報酬（系統風險與非系統風險的溢酬），才能吸引市場中的投資人，所以原先單一證券的預期報酬率應為：

**單一證券的預期報酬＝無風險報酬＋系統風險溢酬＋非系統風險溢酬**

然而，若投資人將證券置於一個效率投資組合中，則該證券的非系統風險將因多角化(diversification)而分散殆盡，則此時投資人比他人承擔較少的風險，卻獲得相同報酬。然因市場為有效率，超額的報酬將會迅速被消化。因此，在效率投資組合中，每個證券皆僅承擔其對應的系統風險，其預期報酬將等於代表機會成本

的無風險報酬和對應於市場風險的風險溢酬。

假設有 n 項資產，其 CAPM 均衡之預期報酬為 $\pi$，其等於市場風險趨避程度與各資產報酬與市場報酬間之共變數及各資產占市場之比重，其公式表示如下：

$$\begin{matrix} E(R_1) \\ \vdots \\ E(R_n) \end{matrix} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_N \end{pmatrix} \qquad ,\beta_j = \frac{Cov(R_j, R_m)}{Var(R_m)}$$

$$= \frac{E(R_M)}{Var(R_M)} \begin{pmatrix} Cov(R_j, R_M) \\ \vdots \\ Cov(R_N, R_M) \end{pmatrix}$$

$$= \delta \sum \omega_M$$

$$= \pi$$

$$E(R_{asset}) = \beta_{asset} E\left(R_{market}\right)$$

$$\beta_{asset} = \frac{Cov(R_{market}, R_{asset}}{Var(R_{market})})$$

CAPM 預測超額報酬與 ß 間呈線性關係，投資組合以 ß 形式表現，高 ß 代表高預期報酬。在此投資人所面臨之問題為何種比例之資產應投資於市場之投資組合。

**三、CAPM 之缺點**

1. CAPM 的模型是建立在完美市場與效率市場假設下，然而證券市場的供需均衡和該證券是否透過投資組合有效地分散風險等現象在現實世界下並不盡然成立。亦即當證券市場非處於均衡或非為有效率市場，或者該證券在非系統風險存在時，部分風險並未能得到適當補償。此時，以 CAPM 將無法完全解釋該證券合理的報酬水準。

2.投資組合對參數之微幅變化具高度敏感

當投資組合之個別資產預期報酬率微幅變動時，會造成投資組合因參數微幅變化而變動。

3.無放空限制

在沒有放空限制下，投資組合可能會有很多不合理之放空部位；若有放空限制，可能產生角解(corner solution)，使投資組合中許多資產沒有權重，或權重比例放在資本額很小之資產的情況。

4.不確定性之概念及個人觀點

在 CAPM 模型中，無法顯示投資人個人觀點及對於個人觀點之不確定性。因此，後續便有多位學者針對 CAPM 中與真實現象不一致的假設進行修正。

部分學者承襲 CAPM，並放寬假設來建立更為一般化之模型。如 Black（1972）提出，投資人可以創造與市場投資組合無關的投資組合（zero β portfolio)，取代原來 CAPM 的模型中對無風險利率存在的假設。另外，Merton（1973）針對 CAPM 中單期模式與均異效率（mean-variance efficiency）等兩項假設加以修正建立跨期資本資產定價模型（intertemporal CAPM，I-CAPM)。Breeden（1979）則延續 Merton 的研究，導入 Ito' Lemma，建立消費資產定價模型（consumption CAPM，C-CAPM)。Black，Literman（1992）則擴充 CAPM 之概念，並加入投資人之觀點及不確定性，建立 Black-Litterman 模型。

另一派學者以其他的觀點來檢視資產定價理論，如 Ross(1976）

以套利的觀點提出了套利定價理論(Arbitrage Pricing Theory, APT)。Ross 認為市場若為有效率，無風險套利的機會不可能持續存在，因此證券的期望報酬率應受系統內共同因子所決定。 若將 APT 視為由 CAPM 的單一解釋因子模型所延伸之多因子模型，亦即個別證券的期望報酬率除了由系統風險來解釋外，應由更多總體的經濟因子解釋。

以下介紹放寬 CAPM 假設而建立較一般化之 Black-Litterman 模型。

## 四、Black-Litterman 資產配置模型

Black-Litterman model 結合 Markowitz 之均異最適化（mean-variance optimization）及 Sharpe 之資本資產訂價，使用 Baysian 估計方法，結合投資人之看法及市場均衡下之預期報酬作為資產配置之基礎。起初假設市場為均衡下，有一代表性投資者持有與市場權重比例相當之投資組合，表示投資者之看法相同，並且作為比較投資者看法之中立點。當投資者持有與市場均衡報酬不同看法時，本模型加入投資人之看法及對於看法之不確定性，進一步結合市場均衡報酬與投資者看法，成為一組新的期望報酬。

以數學來表示，Black-Litterman 模型以預期超額報酬及變異數作為投入要素。起初模型假設市場為均衡狀態，供給等於需求。投資人可根據特殊或自身之資訊，以相對性或絕對性之方式表示對某些資產之看法，同時此看法可以為對單一資產之看法或多個資產間之看法。同時因投資者對看法有不確定性存在，所以

信心水準不必然為100%，而是設定在某一信賴區下。因此由投資者之預期報酬，可由投資人對每個看法的信心水準高低，看出偏離市場均衡報酬之程度。以下以數學型式表示投資人對於一個或多個資產的觀點:

--**投資人之單一觀點**(single view)

假設一投資人認為在95%之信心水準下,i 資產期望之報酬率為3%，變異數為4%，以數學式表示為

$$E(R_i) = 3\% + \varepsilon,$$
$$\varepsilon \sim N(0,2\%^2)$$

Ri:為預期報酬，$\varepsilon_i$:為預測誤差，假設為常態分配，平均數為0，變異數為4%。根據常態分配之特性，可表示為

Pr(-1.96<z<1.96)=95%

Pr(3%-1.96*2%<z<3%+1.96*2%)=95%

--**投資人之多重觀點**(multiple views)

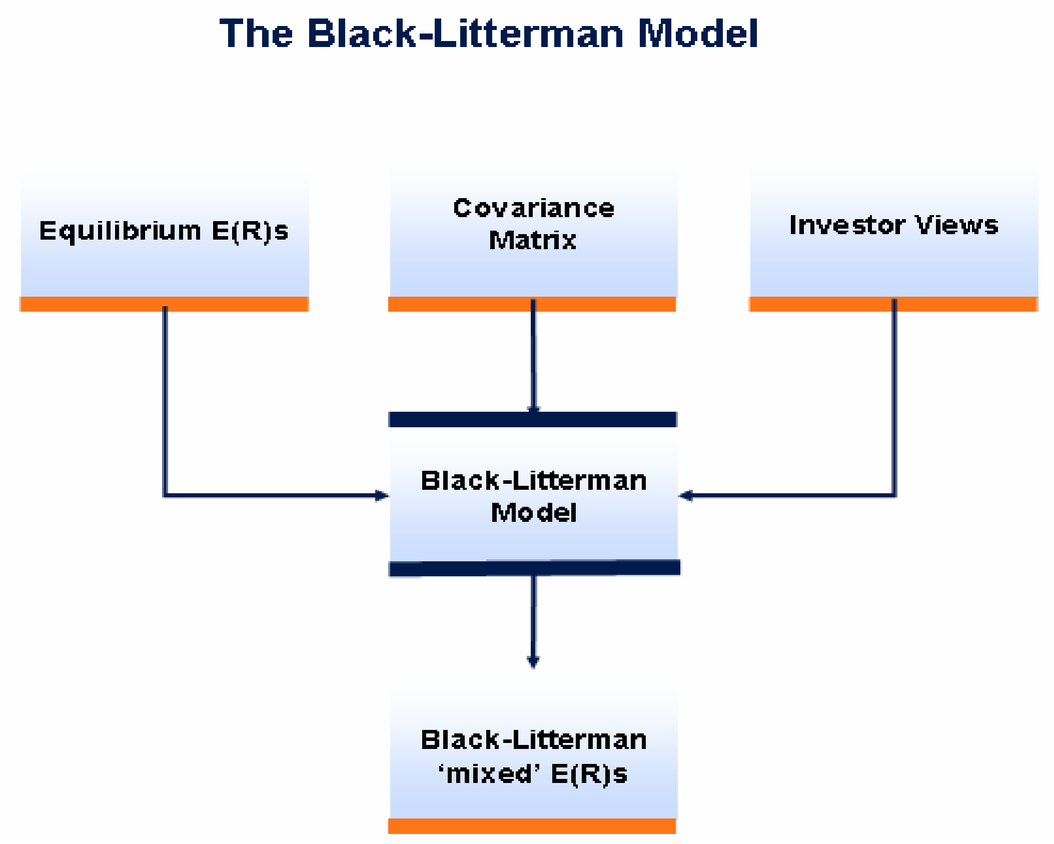
假設一投資人對於4項資產有以下3種看法

1. 資產1之預期報酬（$E(R_1)$）為3%，變異數為4%，在95%信賴區間下將介於3% ±1.96%＊2%;
2. 資產2之預期報酬（$E(R_2)$）為4%，變異數為9%，在95%信賴區間下將介於4% ±1.96%＊3%;
3. 資產4（$E(R_4)$）之預期報酬將大於資產3（$E(R_3)$）之預期報酬1%，變異數為1%，在95%信賴區間下將介於1.96%＊1%;亦即

   $E(R_4) - E(R_3) = 1\% \pm 1.96\% * 1\%$

此 Black-Litterman 模型輸入過程為首先求出 CAPM 下之均衡下，求得預期超額報酬，在此之均衡報酬或為歷史之平均，或為一般市場預測（market concensus）。在此加入投資人之看法及不確定性之變異數-共變數矩陣，得到一 Black-Litterman 之超額預期報酬。

換言之，Black-Litterman 模型結合了投資人之觀點（事先之信念，prior beliefs）與歷史之法則。因此，可以融合 CAPM 隱含之均衡收益與目前投資人所持有之看法相結合去構成新的看法，所形成的投資組合亦會符合投資人的主觀意見，並表現出均衡時收益之不確定。




## 五、Black-Litterman 模型中預期超額報酬推導過程

本部分將推導 Black-Litterman 模型中預期超額報酬過

程。過程及證明參考摘譯 Christodoulakis[1]（2002）之文章。首先先簡介基本之貝氏定理，其次討論在投資人對於預期獲利是否存在不確定下，推導出在 Black-Litterman 模型下之預期報酬之分配、平均數及變異，緊接著再討論 Black-Litterman 模型所隱含之意涵。

## （一)、貝氏法則簡介

假設：基本機率法則成立。考慮兩個可能的事件 A B

A＝預期報酬， B＝均衡報酬

根據貝式法則，A 事件與 B 事件之聯合機率可表示為

$$\begin{aligned}\Pr(A,B) &= \Pr(A|B)\Pr(B)\\ &= \Pr(B|A)\Pr(A)\end{aligned}$$

即給定均衡下所得收益之條件下，所得之預期收益之機率分配為在預期報酬之機率給定下之均衡報酬條件機率 Pr(B|A)乘以事前預期報酬機率 Pr(A)。在此是可看出以 Pr(B)為單位來衡量（如 a1）所顯示：

$$\Pr(A|B) = \frac{\Pr(B|A)\Pr(A)}{\Pr(B)} \qquad \text{(a 1)}$$

變數之定義：

$r$：為 n×1 之超額報酬矩陣

$\Sigma$：為 n×n 共變異矩陣

E（r）=$E(r_{t+1}|I_t)$：為 n×1 矩陣，以代表投資人在 t 期可得之資訊下，對於 t+1 期之預期超額報酬

[1] G. A. Christodoulakis 2002 “Bayesian Optimal Portfolio Selection: the Black-Litterman Approach”

$\pi$ ：為 CAPM 均衡之超額報酬，故可以 $\beta$ 及 Wm 之形式表示：

$$\pi = \beta \quad r_m$$
$$= \beta\omega_m^{'} r$$

Wm 為資本額權重之向量，$\beta = \frac{Cov(r, w_m^{'} r)}{Var(w_m^{'} r)}$

我們的目標為找出事後之預期報酬 E(r)|$\pi$ 之機率分配、其平均數與變異數。

根據以上之符號可將（a1）寫成下列式子：

$$\Pr\left(E(\mathbf{r})|\boldsymbol{\pi}\right) = \frac{\Pr\left(\boldsymbol{\pi}|E(\mathbf{r})\right)\Pr\left(E(\mathbf{r})\right)}{\Pr\left(\boldsymbol{\pi}\right)} \quad \text{(a2)}$$

在此，我們假設 Pr(E(r))為在 n 個預期報酬 E(r)下的 k 個限制式，k×n 之矩陣 P 表示如下列矩陣式：

$$PE(r) = q + V$$
$$PE(r) \sim N(q, \Omega) \quad \text{(a3)}$$

其中，v 為誤差矩陣，v~ N(0，Ω)。誤差項矩陣存在，隱含投資人之看法不確定性觀點存在。若在常態分配及 Ω 除在對角線有值外，其餘數值為 0 下（diagonal Ω)，隱含投資人間主觀之看法彼此相獨立。如果 Ω 之斜對角部分均為 0，表示對看法的預期報酬部分確定，無不確定性存在，則

P E（r）=q。投資人已知 P、Ω 及 q。

所以在給定投資人事前之看法條件下，均衡報酬條件機率分配函數為：

$\pi$|E(r)~ N(E(r), $\tau$ Σ）（a4）

當所有投資人均持相同之看法(homogeneous views)，E( $\pi$ )=E(r)

反映在 CAPM 型態下之市場。

對投資人而言，$\tau$ 為一已知刻度值，用以衡量投資人認為目前市場偏離均衡之程度，同時亦表示均衡報酬會與歷史共變異數成比率的關係。Pr( $\pi$ )將在 Pr(E(r)| $\pi$ ) 積分過程中，變為常數部分。以下進一步將討論投資人對資產有不同之看法但對於預期收益事先之看法為確定不或不確定兩種情況討論最適化預期報酬之估計值。

**1. 若投資人對資產有不同之看法，但對於預期收益事先之看法為確定**

因在此，事先之看法並不涉入不確定性，因此投資人之看法可表示為在最適化過程中加入一限制，導出其預期報酬。

以數學式可表示如下：

$$\min_{E(\mathbf{r})} \ (E(\mathbf{r}) - \pi)' \tau \Sigma \ (E(\mathbf{r}) - \pi)$$

$$\text{s.t. } PE(\mathbf{r}) = \mathbf{q}$$

利用最小平方法，找出 E(r)之封閉解：

$$L = (E(r) - \pi)' \tau \Sigma (E(r) - \pi) - \lambda (PE(r) - q)$$

$$= E(r)' \tau \Sigma E(r) - E(r)' \tau \Sigma \pi - \pi' \tau \Sigma E(r) + \pi' \tau \Sigma \pi$$

$$- \lambda PE(r) + \lambda q$$

f.o.c.

$$\begin{aligned}\frac{\partial L}{\partial E(\mathbf{r})} &= \tau\Sigma' E(\mathbf{r}) + \tau\Sigma E(\mathbf{r}) - \tau\Sigma\ \pi - \tau\Sigma'\pi = 0 \\ &= 2\tau\Sigma E(\mathbf{r}) - 2\tau\Sigma\ \pi - P'\lambda = 0 \qquad (1)\end{aligned}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = PE(\mathbf{r}) - \mathbf{q} = \mathbf{0} \qquad (2)$$

由（1）可找出預期報酬之估計值

$$E(\mathbf{r}) = \pi + \frac{1}{2\tau}\lambda\Sigma^{-1}P'$$

進而代入（2）可得 Lagrange 乘數值：

$$\lambda = \left(P\Sigma^{-1}P'\right)^{-1} 2\tau\ \ (q - P\pi)$$

將 λ 值代入（1)，可以找出最適化之預期報酬估計值 E(r）

$$E(\mathbf{r}) = \pi + \Sigma^{-1}P'\left(P\Sigma^{-1}P'\right)^{-1}(q - P\pi)$$

如果投資人對於預期報酬不存在任何主觀看法，則預期報酬將趨近於均衡報酬，亦即

P=0，E(r）＝$\pi$

**2.若投資人對資產有不同之看法，且對預期報酬看法存在某種程度不確定**

此假設代表 Ω 之斜對角數值不為 0，且之機率分配

為多元常態分配。以下將證明 E(r)|$\pi$ 之平均數為

E[E(r)|$\pi$ ]= $[(\tau\Sigma)^{-1}+(P'\Omega^{-1}P)]^{-1}[(\tau\Sigma)^{-1}\pi+(P'\Omega^{-1}q)]$；變異數為

Var[E(r)|$\pi$ ]=[ $(\tau\Sigma)^{-1}+(P'\Omega^{-1}P)$ $]^{-1}$

證明如下：

根據（a3）及（a4）之假設，預期報酬之機率分配可以表示為

$$\mathrm{pdf}\left(PE(\mathbf{r})\right)=\frac{k}{\sqrt{2\pi_c\left|\Omega\right|}}\exp\left(-\frac{1}{2}\left(PE(\mathbf{r})-\mathbf{q}\right)'\Omega^{-1}\left(PE(\mathbf{r})-\mathbf{q}\right)\right) \quad (3)$$

在給定預期報酬條件下之均衡報酬之機率分配為

$$\mathrm{pdf}\left(\pi|E(\mathbf{r})\right)=\frac{k}{\sqrt{2\pi_c\left|\tau\Sigma\right|}}\exp\left(-\frac{1}{2}\left(\pi-E(\mathbf{r})\right)'\left(\tau\Sigma\right)^{-1}\left(\pi-E(\mathbf{r})\right)\right) \quad (4)$$

由（a2）我們可知

$$\Pr\left(E(\mathbf{r})|\boldsymbol{\pi}\right)=\frac{\Pr\left(\boldsymbol{\pi}|E(\mathbf{r})\right)\Pr\left(E(\mathbf{r})\right)}{\Pr\left(\boldsymbol{\pi}\right)}$$

將各 pdf 帶入，Pr(E(r)|$\pi$)之機率分配會與

$$\exp\left(-\frac{1}{2}\left(\pi-E(\mathbf{r})\right)'\left(\tau\Sigma\right)^{-1}\left(\pi-E(\mathbf{r})\right)-\frac{1}{2}\left(PE(\mathbf{r})-\mathrm{q}\right)'\Omega^{-1}\left(PE(\mathbf{r})-\mathrm{q}\right)\right) \quad (5)$$

成比率關係，經過移項可得到

$$\begin{aligned}
&\exp\left(-\frac{1}{2}\left[E(\mathbf{r})'H\ E(\mathbf{r})-2C'E(\mathbf{r})+A\right]\right)\\
=&\exp\left(-\frac{1}{2}\left[E(\mathbf{r})'H'H\ H^{-1}E(\mathbf{r})-2C'H^{-1}H\ E(\mathbf{r})+A\right]\right)\\
=&\exp\left(-\frac{1}{2}\left[\left(H\ E(\mathbf{r})-C\right)'H^{-1}\left(H\ E(\mathbf{r})-C\right)-C'\ H^{-1}C+A\right]\right)\\
=&\exp\left(-\frac{1}{2}\left[A-C'\ H^{-1}C\right]\right)\times\exp\left(-\frac{1}{2}\left(H\ E(\mathbf{r})-C\right)'H^{-1}\left(H\ E(\mathbf{r})-C\right)\right) \quad (6)
\end{aligned}$$

在此，

$$\begin{aligned}
H &= \left(\tau\Sigma\right)^{-1}+P'\Omega^{-1}P\\
C &= \left(\tau\Sigma\right)^{-1}\boldsymbol{\pi}+P'\Omega^{-1}\mathbf{q}\\
A &= \boldsymbol{\pi}'\left(\tau\Sigma\right)^{-1}\boldsymbol{\pi}+\mathbf{q}'\Omega^{-1}\mathbf{q}
\end{aligned}$$

在積分運算之過程中，因 $\exp\left(-\frac{1}{2}\left[A - C'\ H^{-1}C\right]\right)$ 項、Pr( $\pi$ )

與 E(r)無關，經計算後將成常數，因此可得

Pr(E(r)|$\pi$ )之均數為 $\frac{C}{H}$ ，即

E[E(r)|$\pi$ ]= $\left[(\tau\Sigma)^{-1}+(P'\Omega^{-1}P)\right]^{-1}\left[(\tau\Sigma)^{-1}\boldsymbol{\pi}+(P'\Omega^{-1}q)\right]$

變異數為

Var[E(r)|$\pi$ ]=[ $(\tau\Sigma)^{-1}+(P'\Omega^{-1}P)$ ]$^{-1}$

E[E(r)|$\pi$ ]= $\left[(\tau\Sigma)^{-1}+(P'\Omega^{-1}P)\right]^{-1}\left[(\tau\Sigma)^{-1}\boldsymbol{\pi}+(P'\Omega^{-1}q)\right]$

可表示為

$$\left[(\tau\Sigma)^{-1} + P'\Omega^{-1}P\right]^{-1}\left[(\tau\Sigma)^{-1}\boldsymbol{\pi} + \left(P'\Omega^{-1}P\right)\underbrace{\left(P'P\right)^{-1}P'\mathbf{q}}_{n\times 1}\right] \quad (7)$$

已知

P E(r)=q+v

q= P E(r)-v

我們可以視 q 為對 P 之迴歸方程式,E(r)為未知欲估計之係數，

則投資人預期收益 E(r)最小平方估計值可表為

$(P'P)^{-1}\ P'q$

以符號表示

$$(P'P)^{-1}P'\mathbf{q} = \widehat{E(\mathbf{r})} \quad (8)$$

前面已經推導事後之預期報酬 E(r)|$\pi$ 均數為

$E[E(r)|\pi] = [(\tau\Sigma)^{-1} + (P'\Omega^{-1}P)]^{-1}[(\tau\Sigma)^{-1}\boldsymbol{\pi} + (P'\Omega^{-1}q)]$

根據上式(8)推導並帶入(7)，可改寫成：

$$\left[(\tau\Sigma)^{-1} + P'\Omega^{-1}P\right]^{-1}\left[(\tau\Sigma)^{-1}\boldsymbol{\pi} + \left(P'\Omega^{-1}P\right)\widehat{E(\mathbf{r})}\right]$$

此公式可明顯看出投資人之觀點與歷史資料間之關連性。

$\left[(\tau\Sigma)^{-1}\boldsymbol{\pi} + \left(P'\Omega^{-1}P\right)\widehat{E(\mathbf{r})}\right]$項可視為由資料求得之歷史平均報酬即市場均衡與投資人觀點下所預期之報酬之加權平均，其權數分別為$\frac{(\tau\Sigma)^{-1}}{(\tau\Sigma)^{-1} + p'\Omega^{-1}p}$與$\frac{(P'\Omega^{-1}P)}{(\tau\Sigma)^{-1} + p'\Omega^{-1}p}$。

如果預期報酬之分配趨近於均衡報酬，表示投資人認為目前市場偏離均衡程度不嚴重，即 $\tau\Sigma$ 很小，也就是說$(\tau\Sigma)^{-1}$ 很大，則對均衡報酬之權重部分將增加，反之，若投資人對其看法很有信心，則 $\Omega$ 將變小，將使$(P'\Omega^{-1}P)$ 變大，預期報酬$\widehat{E(\mathbf{r})}$中投資人觀點部分權重將增加。

## 六、Black-Litterman 模型之範例

本節將以一實際全球股票市場投資範例解釋 Black-Litterman 模型如何融合CAPM下所得之均衡報酬與投資人之觀點，將二者套入模型中，進而求出一綜合之預期報酬。

假設全球可分為北美、歐洲、亞洲-太平洋及新興市場等4大區域，根據市值計算，其相對權重分別為55.9%、27.6%、12.6%及3.9%，由歷史數據得到其波動性分別為16.70%、17.60、%、17.10%及25.10%。

| Equity Region | Relative Weight | Volatility |
|---|---|---|
| North America | 55.9% | 16.7% |
| Europe | 27.6% | 17.6% |
| Asia-Pacific | 12.6% | 17.1% |
| Emerging Markets | 3.9% | 25.1% |

各市場間的關連以相關係數表示，分別為北美與歐洲為0.8；北美與亞洲-太平洋為0.53；北美與新興市場為0.62；歐洲與亞洲-太平洋為0.59；歐洲與新興市場為0.67；亞洲-太平洋與新興市場為0.66。換言之，北美與歐洲、新興市場與歐洲、新興市場與亞洲-太平洋之股票市場間成高度正相關，正向線性關係成立。

| | Correlation | | | |
|---|---|---|---|---|
| | North America | Europe | Asia-Pacific | Emerging Markets |
| North America | 1 | | | |
| Europe | 0.80 | 1 | | |
| Asia-Pacific | 0.53 | 0.59 | 1 | |
| Emerging Markets | 0.62 | 0.67 | 0.66 | 1 |

市場之投資組合之均衡之超額報酬設定為3.5%，波動性為15.60%，據此計算，本投資組合之Risk aversion Delta值為

$3.5\%/(15.6\%)^2=1.44\%$

根據以上資料可算出區域間之共變數矩陣，結果如下表：

| Σ (Covariance Matrix) | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | North America | Europe | Asia-Pacific | Emerging Markets |
| North America | 0.0280 | 0.0236 | 0.0153 | 0.0260 |
| Europe | 0.0236 | 0.0311 | 0.0178 | 0.0296 |
| Asia-Pacific | 0.0153 | 0.0178 | 0.0291 | 0.0283 |
| Emerging Markets | 0.0260 | 0.0296 | 0.0283 | 0.0631 |

同時將之乘以Delta，之後將各區域權重與

Delta*Variance-Covariance Matrix 相乘後相加，可求出各區域在CAPM模型下市場均衡之超額報酬。

在此計算下所得在CAPM均衡下，區域預期超額報酬為北美為3.6%；歐洲為3.61%；亞洲-太平洋區域為2.62%；新興市場則為4.12%，其計算流程可見下圖。

| **Market Portfolio Characteristics** | |
|---|---|
| Volatility | 15.6% |
| Equilibrium Excess Return | **3.5%** |

| | |
|---|---|
| Risk Aversion $\delta$ | 1.44 |

| **Equilibrium Excess Return** | |
|---|---|
| North America | 3.60% |
| Europe | 3.61% |
| Asia-Pacific | 2.62% |
| Emerging Markets | 4.12% |

現在將模型中加入各別投資人對於各區域的看法及對於看法之不確定性，假設投資人認為美國股市之超額報酬為3%，其信賴區間為95%；歐洲股市為4%，其信賴區間亦為95%；此外，此投資人亦認為新興市場之股市收益將較亞洲-太平洋區為高1%且其信賴區間為95%。

假設一投資人對於4項資產有以下3種看法：

1. 美國股市之預期超額報酬（$E(R_1)$）為3%，在95%信賴區間下將

介於1.96%＊2%;即

3%±3.92%

2. 歐洲股市之預期超額報酬（$E(R_2)$）為4%，在95%信賴區間下將介於1.96%＊3%;即

   4%±5.88%

3. 新興市場之股市收益之預期超額報酬（$E(R_4)$）將大於亞洲-太平洋區（$E(R_3)$）之預期報酬1%，在95%信賴區間下將介於1.96%＊1%;亦即$E(R_4)-E(R_3)$為

   $E(R_4)-E(R_3)$＝1%±1.96%

假設投資人衡量目前市場偏離均衡之程度設定為τ =0.1。在Black-Litterman 模型中超額預期報酬之平均數為

$$E[E(r)|\pi]=[(\tau\Sigma)^{-1}+(P'\Omega^{-1}P)]^{-1}[(\tau\Sigma)^{-1}\pi+(P'\Omega^{-1}q)]$$

π：CAPM之均衡報酬

$(\tau\Sigma)$：τ為衡量目前市場偏離均衡報酬之尺度，在此例中假設τ＝0.1；∑為共變數矩陣

q：投資人之看法

Ω：投資人對看法之不確定性

若以向量表示

$$q=p.E(R)+\varepsilon$$

$$\varepsilon \sim MVN(0,\Omega)$$

$$P=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 1\end{bmatrix}$$

$$q=\begin{bmatrix}3\%\\4\%\\1\%\end{bmatrix}\Omega=\begin{bmatrix}2\%^2 & 0 & 0\\0 & 3\%^2 & 0\\0 & 0 & 1\%^2\end{bmatrix}$$

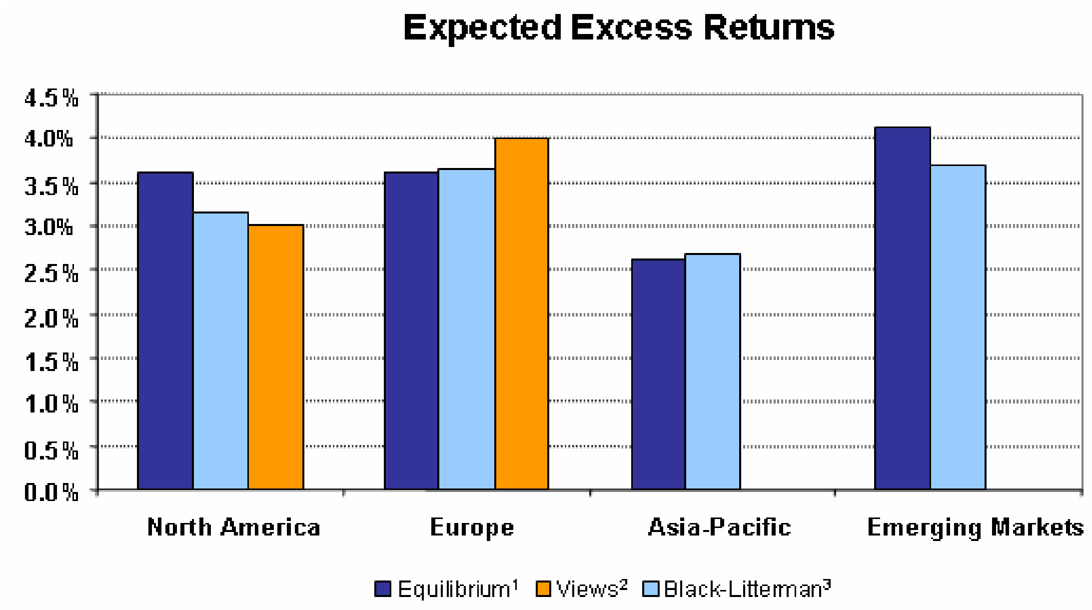
$$\Sigma=\begin{bmatrix}0.0280 & 0.0236 & 0.0153 & 0.0260\\0.0236 & 0.0311 & 0.0178 & 0.0296\\0.0153 & 0.0178 & 0.0291 & 0.0283\\0.0260 & 0.0296 & 0.0283 & 0.0631\end{bmatrix}$$

$$\pi=\begin{bmatrix}3.60\%\\3.61\%\\2.62\%\\4.12\%\end{bmatrix}$$

將以上各項帶入公式中可求出在Black-Litterman 模型下，各區域之預期超額報酬為北美為3.17%，歐洲為3.65%，亞洲-太平洋為2.67%，新興市場為3.68%，結果顯示如下表。

| Expected Excess Returns | | | |
|---|---|---|---|
| | CAPM | Views | Black-Litterman |
| North America | 3.60% | 3.00% | 3.17% |
| Europe | 3.61% | 4.00% | 3.65% |
| Asia-Pacific | 2.62% | x% | 2.67% |
| Emerging Markets | 4.12% | x%+1% | 3.68% |

由結果可知，由Black-Litterman 模型所求得之預期超額報酬介於在CAPM下所求得之預期超額報酬及在投資人特定之觀點及不確定性下求得之預期超額報酬間。此一例子說明Black-Litterman模型融合CAPM之架構並加入投資人之看法及對於看法之不確定性。

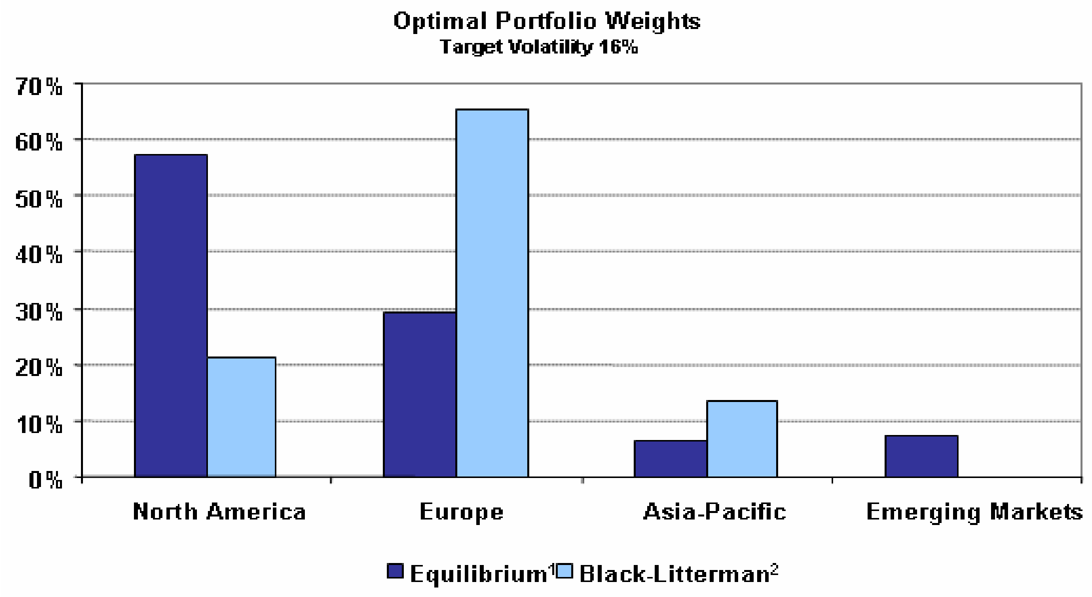



在求出Black-Litterman 模型下各區域之預期超額報酬後，進一步推得各區域之最適投資組合比重。因此例中，τ值等於0.1，表示投資人認為目前市場並不偏離市場均衡過遠，我們利用線性規劃求解之方式，在給定收益下及加入限制式，求取全體投資組合風險最小之投資組合權重。

做法為以CAPM均衡之報酬3.6%為起始點，並在3.6%左右兩側各取一數值。隨後比較此二數值之經風險調整後之預期收益（Sharpe Ratio）之高低。將其中經風險調整後之預期收益較高之點與3.6%設為新的兩端，再利用差補法於兩點間重覆此一過程，進而求出最佳之經風險調整後之預期收益，隨後求出所對應之投資組合權重。同時也可用給定風險，以線性規劃求解之方式，在某些限制下，求得使得全體投資組合收益最大之投資組合權重。

此外，各投資人（機構）亦有其風險承受度不同之區分及投資法令上之限制，因此亦可能給定一風險值，而後在此風險值下，求取預期收益最大下之各區域投資組合比重。

在本例中，若標的之波動性(target volatility)為16%，則可得最適之區域投資組合權重分別為：北美洲為21%，歐洲為65.8%，亞洲-太平洋區域為13.2%，新興市場則為0%。




## 七、Black-Litterman 模型於外匯交易策略之應用

貨幣之收益或其他資產之收益隱含於市場之投資組合(包括股票、債券等)中。因此利用資產間之相關性及市場之投資組合將可計算出任何資產之收益，GSAM以此方法求出貨幣之超額報酬(β值)。同時利用其外匯計量模型所做之預測，可求出在Black-Litterman模型中之投資人之觀點及自身認為對於預測之可信度，進而帶入模型中，求出在Black-Litterman模型下之預期超額報酬及區域之最適投資組合權重，進而進行資產配置。

## 伍、殖利率曲線的建置

在估計殖利率曲線時，理論上有二種方法，第一種是利用存續期間，在期限上作調整的存續期法(Duration method)；另一種是直接求取出殖利率的零息債券法，本篇是介紹一般實務上常用之以現貨(Spot)及期貨(Future)利率建置一年期以下的短期殖利率曲線，而以利率交換(IRS)之報價來建置中長期殖利率曲線。

### 一、殖利率曲線的意義與重要性

所謂殖利率曲線（Yield Curve, YC），係指在同一信用評等等級債券中，以到期年限為橫座標，各期債券的到期殖利率為縱座標，所繪成的圖形，又稱為收益率曲線，它反應出目前市場長短期債券的利率結構。

一般而言，基於時間價值，長天期的利率會高於短天期的利率，故殖利率曲線通常為一條正斜率的曲線。然就理論上來說，殖利率曲線主要有四種基本型態，分別是正斜率、負斜率、水平線以及不規則變化。其型態反映出對未來景氣的看法與預測，是判斷景氣的良好參考工具之一。例如，當利率曲線斜率穩定增加，即長短期利率的利差逐步變大時，往往是市場景氣回升的徵兆。相反的，當利率曲線斜率漸漸縮小甚而變成負斜率時，經常伴隨而來市場景氣的衰退。自一九七〇年代以來美國共出現六次殖利率曲線負斜率的狀況，除一九八二年之外，其餘五次美國經濟均陷入衰退局面，這也是為何先前市場對美國景氣前景萌生疑慮之原因。

在政策運用上，經由殖利率曲線所隱含的情報內涵，中央銀行除可利用殖利率曲線來預測市場未來的景氣、利率、通貨膨脹率及匯率變化外，並且可以從公開市場操作對殖利率曲線的影響程度，評估貨幣政策的可信度與政策效果。

在財務金融的應用上，如利率衍生性商品之訂價及利率相關商品之風險管理制度及財務避險操作，殖利率曲線更是不可或缺的重要參考依據。因為由殖利率曲線可導出各種利率衍生性商品的價格，藉由低買高賣從中獲利。而且殖利率曲線包含市場對未來事件的預期，顯示長、短期利率之關係，使投資者擬定有利的決策。

然而，市場上所交易的債券都是附息債券(coupon bond)，無法直接觀察到零息債券之殖利率，所以在一般公開資訊上(如報紙、財金資訊網、或金融機構之定期研究報告等)所見到的殖利率曲線圖，都是以附息債券之殖利率畫出，並非所需之零息債券殖利率，更無法據以進行相關之應用。因此，如何透過合理的方法正確地估計出殖利率曲線，便成為利率相關商品探討上的首要課題。

## 二、建置殖利率曲線應注意事項

不同的金融商品可建置不同的殖利率曲線(如債券、存款、期貨合約、交換合約及遠期利率合約等)，也可以結合市場各類商品及固定值，以建置一個最能表現風險期望值的殖利率曲線，甚至，可以指定某一段殖利率曲線建置的方式及運用的順序，端看使用者的目的、其避險的工具及資料的收集是否容易等而定。然而不

管利用何種利率指標來建置殖利率曲線，必須注意以下幾點：

1. 首先資料來源必須根基於相同的信用風險水準，例如實務上常用以編制利率曲線之倫敦金融同業拆款利率(LIBOR)及利率交換契約(IRS)均是代表信用評等 AA 級之金融機構所交易的利率。
2. 再則利率須具有代表性，即流動性要充足，流動性不足即不足以代表當時的真實利率，易發生估計偏誤的現象。
3. 殖利率曲線的建構技巧含有不同的假設，除選擇適當的技巧外，瞭解各種假設所代表的意義也至為重要。例如，一般建置殖利率曲線時(如下一節之實例演練)，為簡便起見採用直線插補的方式將各天期直接串連起來，然而此方式容易產生偏誤，因此，許多學術研究即針對插補方式進行探討，其插補法約可歸類為直線法(Straight Line)、多項式法(Polynomial)、曲線法(Splined Polynomial)及加權平均多項式法(Weighted sum of order functions)，通常依曲線函數模型來作配適，即先檢定殖利率曲線的形狀，再作不同的估計。
4. 若考慮稅賦的效果，則應作部分的修正產生賦稅下之殖利率曲線。

## 三、殖利率曲線建置實例演練及分析

假設目前為 2001 年 2 月 19 日，已知市場上六個月期歐元金融同業拆款利率（six-month Euribor）的交換（Swaps）、期貨（Euribor Futures）及現貨（Euribor Cash）的報價資訊如下，

請建置要價方（ask side）歐元的十年殖利率曲線、計算各期的折現因子（單利及複利下），以及在已知債券之市場價格下，比較其投資機會。

**Euro Swaps (Annual Bond Basis)**

| | Ask | Bid |
|---|---|---|
| 1 Yr | 4.725 | 4.695 |
| 2 Yrs | 4.745 | 4.715 |
| 3 Yrs | 4.845 | 4.815 |
| 4 Yrs | 4.93 | 4.9 |
| 5 Yrs | 5.02 | 4.99 |
| 6 Yrs | 5.11 | 5.08 |
| 7 Yrs | 5.2 | 5.17 |
| 8 Yrs | 5.275 | 5.245 |
| 9 Yrs | 5.33 | 5.3 |
| 10Yrs | 5.385 | 5.355 |
| 12Yrs | 5.495 | 5.465 |
| 15Yrs | 5.62 | 5.59 |
| 20Yrs | 5.76 | 5.73 |
| 25Yrs | 5.81 | 5.78 |
| 30Yrs | 5.81 | 5.78 |
| 40Yrs | 5.78 | 5.75 |
| 50Yrs | 5.775 | 5.745 |

**Euribor Futures**

| IMM Date | Ask | Bid |
|---|---|---|
| 21-Mar-01 | 95.445 | 95.440 |
| 20-Jun-01 | 95.415 | 95.410 |
| 19-Sep-01 | 95.405 | 95.400 |
| 19-Dec-01 | 95.415 | 95.410 |
| 20-Mar-02 | 95.435 | 95.430 |
| 19-Jun-02 | 95.450 | 95.400 |
| 18-Sep-02 | 95.435 | 95.430 |

**Euribor Cash**

| Period | Ask | Bid |
|---|---|---|
| 1 Week | 4.50% | 4.38% |
| 1 Month | 4.50% | 4.38% |
| 2 Months | 4.55% | 4.43% |
| 3 Months | 4.60% | 4.48% |

結果表一

**Futures**

DF from 30 to 121
DF from 0 to 30
DF from 0 to 121
product of $D_{30}$ and $D_{30\text{-}121}$

| Days | Date | Weekday | 91d Fwd Rate | Futures Price | Fwd Disc | Spot Disc | ZC Rate |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 19-Feb-01 | Monday | | | | 1.0000000 | |
| 28 | 19-Mar-01 | Monday | | | | 0.9965122 | **4.50%** |
| 30 | 21-Mar-01 | Wednesday | 4.56% | **95.44** | 0.98860468 (3) | 0.9962613 (2) | 4.5032% (1) |
| 59 | 19-Apr-01 | Thursday | | | | 0.9925982 | **4.55%** |
| 121 | 20-Jun-01 | Wednesday | 4.59% | **95.41** | 0.98853057 | 0.9849086 (4) | 4.56% |
| 212 | 19-Sep-01 | Wednesday | 4.60% | **95.40** | 0.98850587 | 0.9736123 | 4.60% |
| 303 | 19-Dec-01 | Wednesday | 4.59% | **95.41** | 0.98853057 | 0.9624215 | 4.64% |
| 394 | 20-Mar-02 | Wednesday | 4.57% | **95.43** | 0.98857998 | 0.9513830 | 4.67% |
| 485 | 19-Jun-02 | Wednesday | 4.60% | **95.40** | 0.98850587 | 0.9405182 | 4.69% |
| 576 | 18-Sep-02 | Wednesday | 4.57% | **95.43** | 0.98857998 | 0.9297078 | 4.73% |
| 667 | 18-Dec-02 | Wednesday | | | | 0.9190905 | 4.75% |
| | | | | | | | |
| **365** | **19-Feb-02** | **Tuesday** | | | | **0.9548882** (7) | **4.66%** (6) |

首先，運用短期的現貨及期貨市場利率求取一年期以內的零息

殖利率及其折現因子（Spot Discount Factor），步驟如下：(參照結果表一)

(1)找出距離目前最近的期貨到期日之現貨利率

本例為 3 月 21 日，距目前 30 天，計算方式為將 1 個月期(28 天)利率 4.5%及 2 個月期(59 天)利率 4.55%以插補法計算

4.5%+(4.55%-4.5%)*(30-28)/(59-28)=4.5032%

(2)計算第一個期貨合約到期時現貨之折現因子

本例為 3 月 21 日，由(1)計算出之現貨利率下之折現因子

$D_{30}$=1/(1+4.5032%*30/360)=0.9962613

(3)計算遠期折現因子：由期貨價格得遠期利率，再由遠期利率得遠期折現因子

本例為(100-95.44)%=4.56%

$D_{30-121}$=1/1+(4.56%*91/360)=0.98860468

(4)計算各期的零息利率折現因子：利用已算出之上期現貨折現因子及本期遠期折現因子推算之

$D_{121}$=$D_{30}$*$D_{30-121}$=(2)*(3)=0.9962613*0.98860468

=0.9849086

(5)重複以上步驟，算出各期的零息利率折現因子，再計算出各期之零息利率

(6)利用插補法計算一年期(365 天)之零息利率為 4.66%

4.64%+(4.67%-4.64%)*(365-303)/(394-303)

=4.66%

(7)計算一年期之現貨折現因子

$D_{365}=1/(1+4.66\%*365/360)=0.9548882$

結果表二

**Swaps**

| | Spot | 1 Yr. | 2 Yr. | 3 Yr. | 4 Yr. | 5 Yr. | 6 Yr. | 7 Yr. | 8 Yr. | 9 Yr. | 10 Yr. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Weekday** | Monday | Tuesday | Wednesday | Thursday | Monday | Monday | Monday | Tuesday | Thursday | Friday | Monday |
| Date | 2001/2/19 | 2002/2/19 | 2003/2/19 | 2004/2/19 | 2005/2/21 | 2006/2/20 | 2007/2/19 | 2008/2/19 | 2009/2/19 | 2010/2/19 | 2011/2/21 |
| Days | 0 | 365 | 730 | 1095 | 1463 | 1827 | 2191 | 2556 | 2922 | 3287 | 3654 |
| | Swap rate | Cashflow | | Treat the fixed side of the swap as a bond priced at par (1) | | | | | | | |
| 2 Yr. | **4.745** | 4.745 | 104.745 | | | | | | | | |
| 3 Yr. | **4.845** | 4.845 | 4.845 | 104.845 | | | | | | | |
| | | | | | | | | | | | |
| 4 Yr. | **4.93** | 4.93 | 4.93 | 4.93 | 104.93 | | | | | | |
| 5 Yr. | **5.02** | 5.02 | 5.02 | 5.02 | 5.02 | 105.02 | | | | | |
| | | | | | | | | | | | |
| 6 Yr. | **5.11** | 5.11 | 5.11 | 5.11 | 5.11 | 5.11 | 105.11 | | | | |
| 7 Yr. | **5.2** | 5.2 | 5.2 | 5.2 | 5.2 | 5.2 | 5.2 | 105.2 | | | |
| 8 Yr. | **5.275** | 5.275 | 5.275 | 5.275 | 5.275 | 5.275 | 5.275 | 5.275 | 105.275 | | |
| 9 Yr. | **5.33** | 5.33 | 5.33 | 5.33 | 5.33 | 5.33 | 5.33 | 5.33 | 5.33 | 105.33 | |
| 10Yrs | **5.385** | 5.385 | 5.385 | 5.385 | 5.385 | 5.385 | 5.385 | 5.385 | 5.385 | 5.385 | 105.385 |
| | | | (2) | | | | | | | | |
| DF | 1 | 0.9548882 | 0.911442602 | 0.8675438 | 0.824568743 | 0.7821045 | 0.7403653 | 0.6994225 | 0.6602586 | 0.62348459 | 0.5879388 |
| Rate (simple) | | 4.66% | 4.79% (3) | 5.02% | 5.24% | 5.49% | 5.76% | 6.05% | 6.34% | 6.61% | 6.90% |
| Rate (annual money market) | | 4.66% | 4.68% | 4.78% | 4.86% | 4.96% | 5.06% | 5.16% | 5.25% | 5.31% | 5.37% |

其次，利用利率交換市場的報價及現金流量去推算第二年至第十年的零息利率折現因子如下：(參照結果表二)

(1)將各期利率交換的現金流量排列出來：利率交換可看成是一連串的浮動利率債券及固定利率債券組合而成，假設無論是浮動或固定利率債券期初發行時價值均等於面額 100，則以固定利率債券來看其不同年期之利率交換報價現金流量應為

2y　$100=D_{1Y}*4.745+D_{2Y}*104.745$

3Y　$100=D_{1Y}*4.845+D_{2Y}*4.845+D_{3Y}*104.845$

(2)已知 $D_{1Y}=D_{365}=0.9548882$(由結果表一得知)，即可求得 $D_{2Y}$，

$100=0.9548882*4.745+D_{2Y}*104.745$

$D_{2Y}=0.9114426$

再運用 $D_{2Y}$ 求算 $D_{3Y}$，以此類推可求算各期的折現因子。

(3)換算為各期的零息利率，換算公式為

單利下 R=(1/D-1)*B/T

複利下 R=(1/D)B/T-1

R：利率　D：折現因子　T：天數(Days)

B：換算為年的天數(Day Basis)

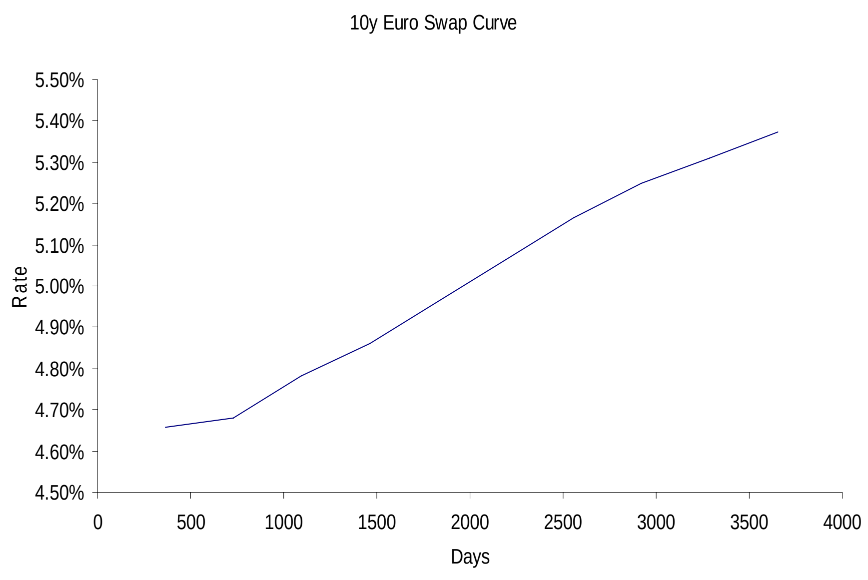
本例 $R_{2Y}=(1/0.9114426-1)*360/730$

$=4.79\%$(單利)

$R_{2Y}=(1/0.9114426)^{360/730}-1$

$=4.68\%$(複利)

最後，將各期零息債券利率描繪在圖上，再以直線串連方式形成殖利率曲線如下圖：




假若市場上有某些債券市場報價如下(假設債券付息日與 swap 固定利率方現金流量日相同)，是否有任何投資機會呢?

| Bond | Market Price | NPV | Difference |
|---|---|---|---|
| Government | | | |
| 10y 6% | 107.27 | 104.71 | -2.56 |
| 6y 4% | 96.91 | 94.36 | -2.55 |
| 7y 3% | 90.01 | 87.28 | -2.73 |
| 3y 6.5% | 106.03 | 104.52 | -1.51 |
| AAA | | | |
| 10y 5% | 98.35 | 97.05 | -1.30 |
| 9y 3.5% | 88.51 | 87.07 | -1.44 |
| 5y 2% | 88.06 | 86.89 | -1.17 |
| AA | | | |
| 8y 4.5% | 94.89 | 95.01 | 0.12 |
| 7y 5% | 98.77 | 98.84 | 0.07 |
| 5y 6% | 104.35 | 104.25 | -0.10 |

將各債券之現金流量依上述所計算出之各年期零息債券折現因子加以折現，得每種債券之淨現值 NPV。

如政府公債 3y 6.5% 之 NPV 為

NPV=6.5*0.9548882+6.5*0.9114426+106.5*0.8675438

=104.52

比較市價與 NPV，可看出政府公債與信評 AAA 級的債券其 NPV 均比市價低，因其所用的折現因子為信評 AA 級的債券所計算出來的，是以較低，符合預期。而信評 AA 級的債券，其比較基礎相同，若所計算出之 NPV 較市價為高，則表示投資有利可圖。如 AA 級 8y 4.5%債券所示。

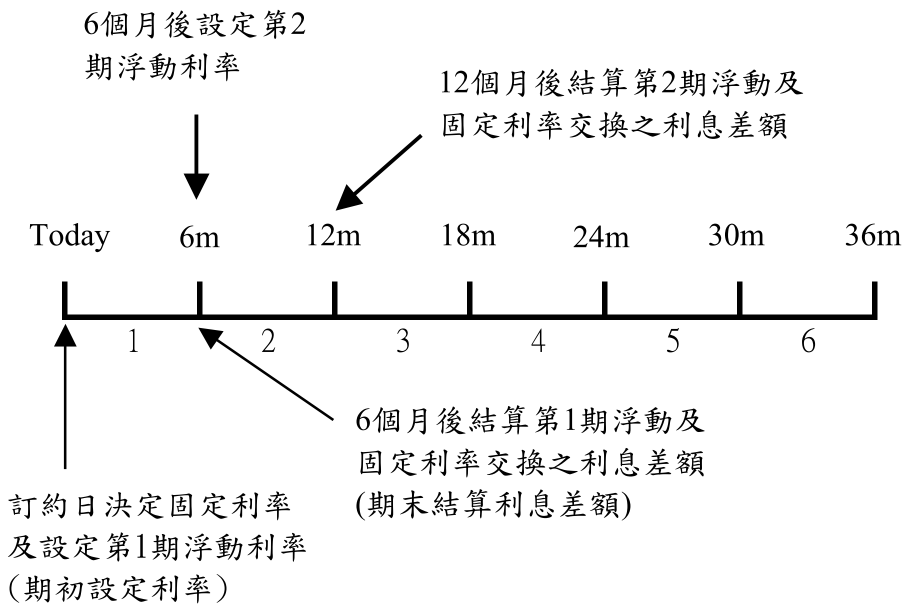
# 陸、利率交換

## 一、利率交換的意義與類型

利率交換(Interest Rate Swap; IRS)，係指交易雙方約定在未來一定期間內，以特定的指標利率（包括浮動或固定利率）作為交

換的標的，於未來定期就不同指標利率計息，清算利息的差額。該契約並不交換本金，本金僅為名目本金，作為計算利息支付之基礎。每一期利率交換可以看成是一個遠期利率協定，利率交換契約則是一系列利息交換之遠期契約組合。

最常見的利率交換型態為固定利率與浮動利率相互交換之基本型利率交換(plain vanilla 或 fixed-for-floating)。假設一筆合約期間三年，每半年設定利率一次，並約定浮動利率指標為六個月期 LIBOR 的基本型 SWAP(“Plain Vanilla” 3-year semi-semi swap)，其利率重設及付款結構可圖示如下：




另根據交易雙方對利率指標之選擇、或本金的大小、或起算日、或付款日等的變化，有各種不同利率交換型態。如涉及不同浮動利率指標的基差利率交換(basis swap)、名目本金遞增(accreting)、遞減(amortizing)或起伏型(roller-coaster)利率交換、浮動利率加碼之碼差利率交換(margin swap)、起算日在未來的遠期利

率交換(forward-start swap)、契約一方須補償另一方之偏離市價之利率交換(off-market swap)、一方付一序列現金流量，一方只在到期時一次付清總額之零息利率交換(zero-coupon swap)、浮動利率決定於期末之期末 LIBOR 利率交換(LIBOR-in-areas swap)等。

**二、利率交換的功能**

利率交換通常起於交易雙方之信用評等不同，致融資成本的差異，或對未來利率走勢的看法不同而產生，另其也為長期資本性質之交易的主要避險工具。目前因其融資及風險管理工具的角色，使利率交換成為交換市場中最熱門的商品。簡述其主要功能如下：

1.降低資金成本-比較利益之運用：此為利率交換的最初目的。借款者因信用評等、知名度或其他因素的差異，使其在長、短天期融資或在浮動、固定利率市場上有其個別之比較性優勢，利率交換交易之雙方則利用其個別之比較利益進行套利，以降低雙方資金成本。

2.規避利率風險: 屬負債面的管理。例如預期利率下跌時，可將固定利率型態之債務換成浮動利率，若預期利率上漲時，則可將浮動利率型態之債務換成固定利率，以規避利率風險。

3.增加資產收益：屬資產面的管理。利率交換交易並不侷限於負債方面利息支出的交換，在資產方面亦可有所運用。例如資產持有者可以在預期利率下跌時，轉換資產為固定利率型態，或在預期利率上漲時，轉換其資產為浮動利率型態。一般基金投資策略常明定其利用利率交換工具來達規避投資風險之目的。

4.增加籌資途徑：如信用套利的舉債需求者，因本身債信不足，無法取得較長及較低之固定利率成本，則可透過發行短期浮動利率債券，再搭配利率交換，形成長期固定利率負債。

5.靈活資產負債管理：當欲改變資產或負債類型之組合，以配合投資組合管理或對利率未來動向之鎖定時，可以利用利率交換來調整，而無需賣出資產或償還債務。另可透過利率交換調整公司資產負債的利率敏感性部位，使浮動利率資產可與浮動利率負債相配合，固定利率資產可與固定利率負債相配合。

**三、利率交換交易市場之特性**

利率交換交易市場具有以下特性：

1.依市場慣例，買方指付固定利率收浮動利率者，賣方指收固定利率付浮動利率者（Receiver 指收固定利率的一方，而 Payer 指付固定利率的一方）。

2.報價一般以固定利率報價，假設報價為 5.65-5.61，表示買方必須付 5.65%的固定利率以換取浮動利率，賣方則付浮動利率收取 5.61%的固定利率(long a swap 表 receive fix )，或表示相對於浮動利率指標，交易商願意支付之固定利率為 5.61%，願意收取之固定利率為 5.65%。

3.浮動利率指標有 LIBOR、Prime(FED 每週公佈之指數)、國庫券、定存單、商業本票、聯邦資金及銀行承兌匯票等。

4.以國際主要交易貨幣為名目本金的契約交易較活絡。如美元、歐元、英鎊、日圓等。

5.全球主要銀行及金融機構操作部位大並扮演造市者角色。

6.短期契約的流動性較長期契約高。

7.目前除少部分利率交換是基於個別交易對手本身之交易需求而量身訂做外，大多為標準化的交易合約。

## 四、利率交換訂價基本概念及實例演練分析

(一)、訂價基本概念：

典型的利率交換契約，為交易雙方於未來交換一連串的現金流量，一方收取固定利率，另一方收取浮動利率，分析現金流量會發現其等同固定利率債券(fixed rate note)及浮動利率債券(floating rate note, FRN)的組合。利率交換之訂價即利用固定利率端的現金流量折現值必須和浮動利率端的現金流量折現值相等的觀念而形成。其中浮動利率債券的票面利率會隨市場利率變動，目前無法得知，然在無套利機會的假設下，仍可利用不同期限之即期利率求算出遠期利率，在遠期利率被實現的假設下，即可估算每期現金流量。且任一浮動利率債券在到期前任何時點的理論價格皆等於其面額，則在「固定利率債券現金流量的現值=浮動利率債券現金流量的現值=面額」的條件下，可得出固定利率端的報價。

(二)、實例演練分析：

假設五年期利率交換契約，合約金額 50,000,000 美金，約定買方收取浮動利率指標六個月 LIBOR，每半年交換一次，已知零息債券殖利率曲線的折現因子如下：

| Spot Date = 5 June 2000 Date | DF Dollars |
|---|---|
| 5-Jun-00 | 1.0000000 |
| 5-Sep-00 | 0.9901317 |
| 5-Dec-00 | 0.9809451 |
| 5-Mar-01 | 0.9722314 |
| 5-Jun-01 | 0.9637462 |
| 5-Sep-01 | 0.9542922 |
| 5-Dec-01 | 0.9448396 |
| 5-Mar-02 | 0.9348253 |
| 5-Jun-02 | 0.9243694 |
| 5-Sep-02 | 0.9137451 |
| 5-Dec-02 | 0.9030665 |
| 5-Mar-03 | 0.8921403 |
| 5-Jun-03 | 0.8808121 |
| 5-Sep-03 | 0.8691076 |
| 5-Dec-03 | 0.8573927 |
| 5-Mar-04 | 0.8459002 |
| 7-Jun-04 | 0.8339591 |
| 6-Sep-04 | 0.8225677 |
| 6-Dec-04 | 0.8111579 |
| 7-Mar-05 | 0.8001320 |
| 6-Jun-05 | 0.7891334 |

結果表

**Dollar 5Y semi-semi** **Principal** 50,000,000.00
**Rate** 4.674% **(7)**

固定利率方可看成是每半年付息一次coupon爲4.674%的5年期債券

| Date | Weekday | Days | (2) Discount | (3) Forward DF | (4) Forward Rate | (5) Bank Pays Fixed Cashflow | (5)-1 Present Value Fixed Cashflow | (6) Bank Receives Floating Cashflow | (6)-1 Present Value Floating Cashflow | Fixed Side as Bond | 債券現值 PV |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 5-Jun-00 | Monday | 0 | 1 | | | | | | | | |
| 5-Dec-00 | Tuesday | 183 | 0.9809451 | 0.9809451 | 3.8213% | 1,188,026.25 | 1,165,388.53 | 971,252.11 | 952,745.00 | 1,188,026.25 | 1,165,388.53 |
| **5-Jun-01** | Tuesday | 182 | **0.9637462** | **0.982467011** | **3.5300%** | **1,181,534.31** | **1,138,699.20** | **892,294.05** | **859,945.00** | 1,181,534.31 | 1,138,699.20 |
| 5-Dec-01 | Wednesday | 183 | 0.9448396 | 0.980382179 | 3.9365% | 1,188,026.25 | 1,122,494.25 | 1,000,519.03 | 945,330.00 | 1,188,026.25 | 1,122,494.25 |
| 5-Jun-02 | Wednesday | 182 | 0.9243694 | 0.978334735 | 4.3803% | 1,181,534.31 | 1,092,174.16 | 1,107,252.14 | 1,023,510.00 | 1,181,534.31 | 1,092,174.16 |
| 5-Dec-02 | Thursday | 183 | 0.9030665 | 0.976954127 | 4.6406% | 1,188,026.25 | 1,072,866.71 | 1,179,475.71 | 1,065,145.00 | 1,188,026.25 | 1,072,866.71 |
| 5-Jun-03 | Thursday | 182 | 0.8808121 | 0.975356854 | 4.9976% | 1,181,534.31 | 1,040,709.71 | 1,263,288.73 | 1,112,720.00 | 1,181,534.31 | 1,040,709.71 |
| 5-Dec-03 | Friday | 183 | 0.8573927 | 0.973411582 | 5.3734% | 1,188,026.25 | 1,018,605.04 | 1,365,733.58 | 1,170,970.00 | 1,188,026.25 | 1,018,605.04 |
| **7-Jun-04** | **Monday** | 185 | 0.8339591 | 0.972668767 | 5.4680% | 1,201,010.15 | 1,001,593.34 | 1,404,960.99 | 1,171,680.00 | 1,201,010.15 | 1,001,593.34 |
| 6-Dec-04 | Monday | 182 | 0.8111579 | 0.972659091 | 5.5601% | 1,181,534.31 | 958,410.89 | 1,405,472.35 | 1,140,060.00 | 1,181,534.31 | 958,410.89 |
| 6-Jun-05 | Monday | 182 | 0.7891334 | 0.972848073 | 5.5206% | 1,181,534.31 | 932,388.18 | 1,395,486.49 | 1,101,225.00 | 51,181,534.31 | 40,389,058.18 |
| | | | | | | **NPV:** | 10,543,330.00 | | 10,543,330.00 | **NPV:** | 50,000,000.00 |
| | | | | Average: | 4.72% | | | | 浮動利率債券現值爲面額 | **FRN Value:** | 50,000,000.00 |
| | | | | | | | **Swap Value** | - | | **Difference:** | - |

計算利率交換契約買方每期應支付的固定利率(訂價)步驟如下：(參照上列 excel 結果表)

(1)建置零息債券殖利率曲線：即先決定目前市場上的利率期限結構(the term structure of interest rates)，以決定任一時點之折現利

率及折現因子，方法如前一節所述。本例為方便起見假設已知。

(2)以內差法取得各期現金流量的折現因子

(3)利用零息債券折現因子求算遠期折現因子

利用 $D_{forward}=D_{long}/D_{short}$ 求算，本例中

如 5-Jun-01(以下均以此日期為例) 之 $D_{forward}$

$=D_{5\text{-Jun-01}}/D_{5\text{-Dec-00}}=0.9637462/0.9809451=0.982467011$

(4)根據遠期折現因子求算隱含遠期利率

若依單利計算 $R_f=(1/D_f-1)*B/T$

本例 $R_f=(1/0.982467011-1)*360/182=3.5300\%$

(5)以隱含遠期利率求算浮動利率端的現金流量

浮動利率端各期現金流量=principle*$R_{f,i}$*act 天數/360

=50,000,000*3.5300%*182/360=892,294.05

(5)-1 以零息債券折現因子求算浮動利率端的現值

=892,294.05*0.9637462=859,945.00

(6)求算固定利率端的現金流量

固定利率端各期現金流量=principle*IRS*act 天數/360

=50,000,000*IRS(欲求算的利率)*182/360

(6)-1 以零息債券折現因子求算固定利率端的現值

=(6)* 0.9637462

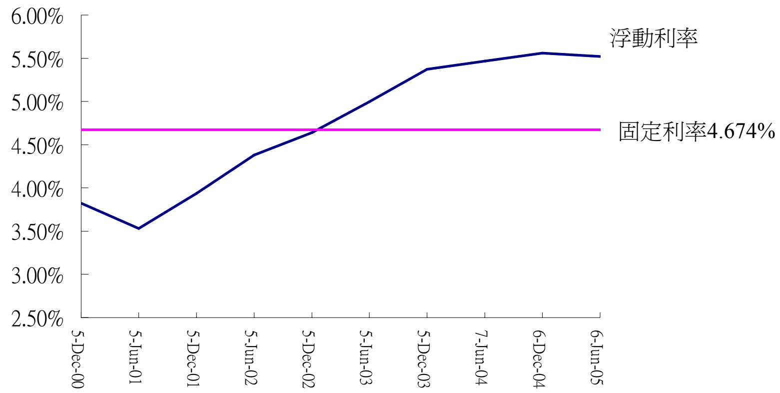
(7)求算使浮動利率端的現值=固定利率端的現值之固定利率：利用 Excel 目標搜尋功能，求得固定利率 4.674%。

其中 Excel 目標搜尋輸入資料如下

| | |
|---|---|
| 目標儲存格 | 浮動利率現值-固定利率現值 |
| 目標值 | 0 |
| 變數儲存格 | 欲求算之固定利率 |

依計算出之結果，可將固定利率端看成是每半年付息一次，coupon 為 4.674%的 5 年期債券，求算其現值正好為面額 50,000,000，與浮動利率端現值相同(結果表最後一欄)。

依上述實例結果來看，遠期利率水準介於 3.82%至 5.52%間，平均為 4.72%，而計算出之固定交換利率為 4.674%，符合概念上交換利率為遠期利率之平均水準的觀念。可以圖形表示如下：




用在評價利率交換的價值上，若市場上的報價使浮動利率端的現值不等於於固定利率端的現值，則此利率交換有價值存在。以式子表示：

付固定利率端之 SWAP 的價值=NPV(浮動利率端現金流量)-NPV(固定利率端現金流量)。

# 柒、結論

機構在風險預算模型架構下，定期公布各部門之部位、投資工具及對於總獲利之表現，並由內控部門加以監控，因此能即時明確評估各團隊之投資判斷及投資經理人之表現，並控制風險。在投資組合中，若能加入相關性較低之投資產品以分散風險，並妥適利用衍生性金融商品工具加以避險，將可有助經理人投資操作之彈性，進而提高預期報酬。

外匯操作策略主要可分為基本面分析及模型分析；基本面分析主要是以主觀判斷（judgmental)為主，其主要針對之市場為主要貨幣及新興市場貨幣，以屬質與屬量之變數給定分數，並考量其相關性，得出具有評斷標準各幣別比較，並從中取得具吸引力之投資幣別。模型分析是以價值分析、動能、資金流量及總經政策等作為投入預測指標，以平衡計分卡之方式，加上過去平均之固定給定投入權數，藉由 Black-Litterman 模型加以模型化並產生最適之投資組合。

Black-Litterman 綜合 CAPM 模型，在 CAPM 模型下加入個別投資人(投資機構)之看法，及對看法之不確定性，為一相當實用之模型。未來在訂定風險控管及擬定外匯存底投資策略時，可參酌 GSAM 作法，並用屬值及屬量指標、主觀看法及自計量模型所得之預測模式，並加入對看法不確定性等因素，且妥適利用衍生性金融商品工具加以避險，從而在既定的風險及投資限制考量下，追求更高之外匯存底收益。

在利率衍生性金融商品方面，殖利率曲線的建置，可有效推

估同品質不同期限別的債券殖利率，藉以制定債券價格；亦可作為其他不同信用風險之利率衍生性商品的評價基礎，及財務避險操作的重要參考依據。而利率交換則早已是融資及風險管理上的重要工具。實務上雖有各種軟體可直接畫出殖利率曲線及直接得到利率交換的報價，然透過本文實例一步步操作方式，畫出殖利率曲線及求算利率交換的訂價，未來於運用時，將可更瞭解其基本運作及內部意含。

## 參考資料


Black, F. and R. Litterman, 1992, “Global Portfolio Optimization “, *Financial Analysst Journal*.

_______, 1991, Global Asset Allocation With Equities, Bonds, and Currencies, *Goldman-Sachs, Fixed Income Research*

Bevan, A. and K. Winkelmann,1998, ”Using the Black-Litterman Global Asset Allocation: Three Years of Practical Experience .”, *G oldman Sachs Fixed Income Research*.

Gai, Prasanna and N.Vause ,2004, “Risk Appetite: Concept and Measurement” *Financial Stability Review, Bank of England.*

Koch, Werner, 2005 ,”Consistant Return Estimates- The Black-Litterman Approach”, *COMINVEST ,Frankfurt MathFinance Workshop 2005.*

Idzorek, Thomas M., 2004,” A Step-By-Step Guide to the Black-Litterman Model- Incorporating User-specified Confidence Level”, *Zephyr Associates Inc.*

Christodoulakis, George. A.,2002, “Bayesian Optimal Portfolio Selection：the Black-Litterman Approach”, *Sir John Cass Business School, City University, London.*

Goldman Sachs Asset Management ,2006 ,”Quantitative Currency Overlay”

________,2006 ,”An Introduction to the Black-Litterman Asset Allocation Model”. *Goldman Sachs Asset Management.*

________,2006,” Global Currency Management Overview” *Goldman Sachs Asset Management.*

________,2005, “Introduction to the GIS Asset Allocation Model” *Goldman Sachs Asset Management.*

________,2006,”Goldman Sachs Asset Management Overview” *Goldman Sachs Asset Management.*

Bond, Andrew ,2006,”PowerPoint, How We Manage Global Currencies?” *Goldman Sachs Asset Management Annual Central Bank University Seminar.*

Lindsay, Iain and Andrew Wilson, 2006, “PowerPoint, Risk Budgeting and Risk Management” *Goldman Sachs Asset Management Annual Central Bank University Seminar.*

Fornasari, Francesca ,2006, “GSAM Weekly G10 Tactical Update” *Goldman Sachs Asset Management.*

Goldman Sachs Asset Management, 2005 ,”Risk and Attribution for Fixed-Income Products August”, *Golbal Fixed Income GSAM*

Cox, David “”Course Notes and Material, Interest Rate Derivative Intensive”, *London Financial Studies, Goodman Sachs.*